

P. O. Hess

Frankfurt: 1980.

Generalisiertes Kollektivmodell
und das Periodensystem der
Potential-Energie-Flächen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
vorgelegt beim Fachbereich Physik der
Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

von

Peter Otto Hess
aus Kelkheim/Ts.

Frankfurt am Main

1980

Handwritten text, likely a title or header, appearing as bleed-through from the reverse side of the page.

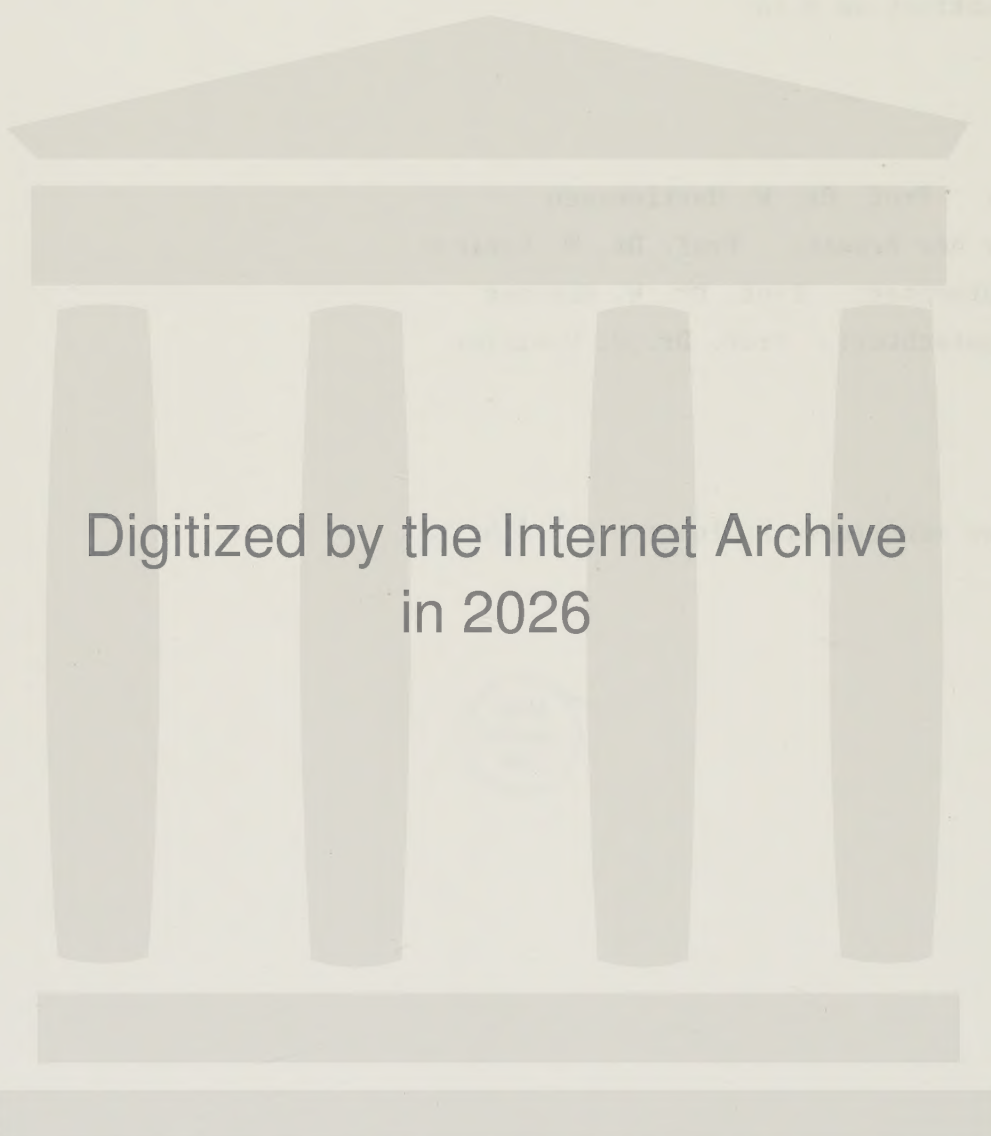
Handwritten text, likely a title or header, appearing as bleed-through from the reverse side of the page.



Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Physik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

Dekan: Prof. Dr. W. Martienssen
Leiter der Arbeit: Prof. Dr. W. Greiner
Erstgutachter: Prof. Dr. W. Greiner
Zweitgutachter: Prof. Dr. R. Dreizler

Tag der mündlichen Prüfung: 7. MAI 1980



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550820_0017

ABSTRACT

A general collective model is presented, which can describe all possible limits, like rotator, vibrator, triaxial nuclei, and all transitions between them. The model is based on a geometric description of the nuclear surface, which was introduced by Fick and Flügge in the 40's and by Bohr and Mottelson in the 50's. Furthermore the model is able to describe shape isomeric states, which are explained by a second minimum in the Potential-Energy-Surface (PES). The potential is as flexible as possible. All kinds of potentials can be constructed. Also the kinetic energy can be chosen arbitrarily. The collective property are illustrated by a Potential-Energy-Surface (PES). The idea is to construct for each heavy nucleus such a PES. Structural changes in collective properties can then be discussed over wide ranges of isotones and isotopes. The model is applied to the Pt-, Os- and W-chain of isotopes and to $^{238}_{92}\text{U}$. The flexibility of this model but also the limits are discussed.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
(0) Vorwort.....	1
(I) Das kollektive Kernmodell.....	2
(1) Definition der Variablen.....	2
(2) Hamiltonoperator.....	9
(a) Potential.....	9
(b) kinetische Energie.....	13
(3) Quadrupoloperator.....	15
(II) Gruppentheorie des Kollektivmodells, Basisproblem.	19
(A),(1) Definition der Gruppe, kontinuierliche Gruppe..	19
(2) Infinitesimale Transformation, Lie-Algebra.....	26
(3) Was ist eine Darstellung?.....	31
(4) Klassifikation kontinuierlicher Gruppen.....	33
(5) Invariantenproblem.....	37
(6) Gruppenreduzierung.....	39
(B) Der 5-dim. harmonische Oszillator.....	41
(1) Die Symmetriegruppe des 5-dim. harm. Oszillators	41
(2) Klassifikation der Zustände.....	42
(3) Die Gruppen $O(3)$ und $O(5)$	44
(4) Einschub.....	49
(5) Konstruktion der Eigenfunktionen.....	52
(a) Radialer Anteil.....	52
(b) Einführen oft verwendeter Ausdrücke.....	55
(c) Skizzierung des Vorgehens, endgültige Konstruktion.....	59
(6) Matrixelemente des Hamiltonoperators.....	77
(a) Potentieller Anteil.....	77

	Seite
(b) Kinetischer Anteil.....	82
(7) Matrixelemente des Quadrupoloperators.....	85
(C) Neue Basis.....	87
(1) Vorstellen der neuen Basis.....	87
(2) Eigenschaften der neuen Basis.....	89
(a) Energie.....	89
(b) Wellenfunktion.....	91
(3) Matrixelemente.....	93
(a) Potential.....	93
(b) Kinetische Energie.....	93
(4) Ergebnisse von Testrechnungen.....	94
(a) Einführende Bemerkungen.....	94
(b) Konvergenstests.....	95
(i) ^{166}Er	100
(ii) ^{126}Xe	106
(iii) ^{142}Sm	109
(iv) $^{166}\text{Er}^*$	109
(5) Abschätzen der besten Basis.....	113
(a) Einführende Bemerkungen.....	113
(b) Methode zur Bestimmung der optimalen Basisparameter.....	114
(III) Vergleich zwischen IBM und dem general. Modell...	118
(1) Einführung in das IB-Modell.....	118
(2) Beschreibung des Frankfurter Hamiltonoperators.	122
(3) Beschreibung des IBM-Hamiltonoperators.....	123
(4) Vereinfachung der Wechselwirkungsanteile.....	124
(a) A-Anteil.....	124
(b) B+C-Anteil.....	125
(c) D-Anteil.....	126
(d) E-Anteil.....	128
(5) Vergleich beider Modelle.....	131
(IV) Anwendungen.....	132

	Seite
(1) Os-, Pt- und W-Kette.....	132
(a) Diskussion der Parameter.....	132
(b) Allgemeine Diskussion.....	139
(2) $^{238}_{92}\text{U}$	161
(a) Ein Minimum.....	161
(b) Zwei Minima.....	166
(V) Numerisches Anpassungsverfahren.....	170
(1) Verfahren.....	170
(2) Was muss bei einer Anpassung beachtet werden?..	172
(VI) Zusammenfassung und Ausblick.....	175
ANHANG A.....	177
ANHANG B.....	179
ANHANG C.....	180
ANHANG D.....	183
ANHANG E.....	187
ANHANG F.....	188
ANHANG G.....	190
ANHANG H.....	192
ANHANG I.....	194
ANHANG J.....	198
ANHANG K.....	200
ANHANG L.....	201
ANHANG M.....	205
ANHANG Pt.....	207
ANHANG Os.....	231
ANHANG W.....	255
ANHANG U.....	271

(0) Vorwort

Ziel der Arbeit ist es, ein kollektives Modell der Kerne zu konstruieren, in dem alle Grenzfälle enthalten sind, für die bisher spezielle Modelle entwickelt wurden. So sollen γ -instabile Kerne, Rotatoren, triaxiale Kerne und Oszillatoren damit beschrieben werden und ein kontinuierlicher Übergang zwischen diesen Grenzfällen sollte möglich sein. Damit werden alle Kerne, die durch ein kollektives Modell erklärt werden können, beschrieben. Die Ergebnisse werden in einem "Periodensystem der gg-Kerne" zusammengefasst. In dieser Darstellung sind Potentialenergieflächen (PES) des kollektiven Potentials aufgetragen. Auf einen Blick können dann systematische Veränderungen der Flächen im Zusammenhang erkannt werden.

Da der konstruierte kollektive Hamiltonoperator sehr kompliziert ist und viele zu bestimmende Grössen enthält, ist dazu ein umfangreicher mathematischer Aufwand nötig. So müssen die Eigenfunktionen in der Basis des fünfdimensionalen harmonischen Oszillators mit der maximalen Symmetriegruppe $SU(5)$ entwickelt werden. Die Klassifikation und Konstruktion der Basisfunktionen geschieht auf gruppentheoretischen Wege. Die Bestimmung der freien Grössen wird über ein nicht-lineares Anpassungsprogramm erreicht.

(I) Das kollektive Modell

(1) Definition der Variablen

Schon früh wurden Zustände in Anregungsspektren entdeckt, die nicht durch das einfache Schalenmodell erklärt werden konnten (1,2,3). Sie lagen unterhalb der Schwelle, wo Einteilchenanregungen erwartet wurden. Bei näherer Betrachtung zeigte sich, dass einige Spektren in zwei Klassen eingeteilt werden konnten:

(a) Harmonisches Spektrum

In Fig. I.1 ist das Spektrum eines nahezu harmonischen Oszillator aufgezeigt(1).

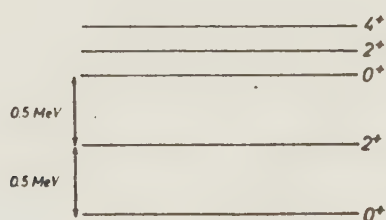


Fig. I.1

Im Falle eines echten harmonischen Oszillators sind die Zustände $0_2^+, 2_2^+, 4_1^+$ entartet und die Energiedifferenz ΔE zwischen $0_1^+ - 2_1^+$ und $2_1^+ - (0_2^+, 2_2^+, 4_1^+)$ ist identisch, d.h. die Energie lässt sich durch

$$E = \hbar \omega \left(\nu + \frac{5}{2} \right) \quad (I.1)$$

darstellen, wobei ν die Phononenzahl charakterisiert und $\hbar\omega$ die Energiedifferenz angibt.

(b) Rotationsspektrum

Bei einigen Kernen verhalten sich die niedrigsten Zustände wie in Fig. I.2 angedeutet ist.

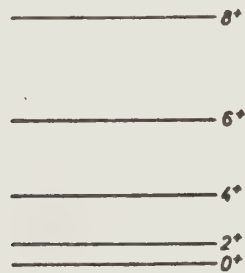


Fig. I.2

Dieses Energiespektrum verhält sich wie ein starrer Rotator:

$$E = \frac{\hbar^2}{2\Theta_0} L(L+1) \quad (I.2)$$

wobei L der Drehimpuls und Θ_0 das Trägheitsmoment ist. Θ_0 wird durch den Abstand $0_1^+ - 2_1^+$ bestimmt.

Diese beiden Klassen von Spektren wurden schon früh in der Chemie bei Molekülspektren gemessen und sie wurden als Vibrationen bzw. Rotationen des Moleküls interpretiert. In Anlehnung an die Chemie wurde die gleiche Klassifikation für die oben genannten Kernspektren verwendet! Vibrationen und Rotationen sind aber "kollektive Bewegungen" der Nukleonen im Kern, die sich in Form von Oberflächenveränderungen bemerkbar machen. Die "kollektiven Spektren" versucht man

deshalb dadurch zu beschreiben, dass die Oberflächenbewegung des Kerns untersucht wird.

Ein einfacher Ansatz ist, dass eine Oberfläche definiert wird und man nach dem vollständigen Satz der Kugelflächenfunktionen entwickelt (1,3,39,40):

$$R = R_0 \left(1 + \sum_{\ell m} \alpha_{\ell m} Y_{\ell m}^*(\vartheta, \varphi) \right) \quad (I.3)$$

R gibt den Radius des Kerns bei verschwindender Deformation ($\alpha_{\ell m} = 0$ für alle ℓ, m) an. Die Summe in (I.3) kann weiter vereinfacht werden. Dazu betrachten wir die verschiedenen Multipolmomente $\ell = 0, 1, \dots$:

(a) $\ell = 0$

Dies entspricht einer Monopolbewegung des Kerns, d.h. im Laufe seiner periodischen Bewegung schrumpft er zusammen und dehnt sich wieder aus. Da wir aber den Kern als inkompressibel voraussetzen, kann dieser Term nicht zur Bewegung beitragen, d.h. $\alpha_{00} = 0$! Diese Voraussetzung ist innerhalb des Energiebereichs, für den wir uns interessieren (0-5 MEV), gültig, da Kompressionen des Kerns erst bei sehr hohen Energien auftreten (ab ca. 40-50 MEV) (1). (Bei der Definition des Quadrupoloperators wird gezeigt, dass α_{00} benötigt wird, um Volumenkonstanz zu gewährleisten. Es wird sich aber herausstellen, dass α_{00} eine Funktion von α_{2m} sein wird.)

(b) $\ell = 1$

In Ref.(1) wird gezeigt, dass diese Dipolschwingungen einer Translation des Schwerpunktes entspricht. Da wir aber die Erhaltung des Schwerpunktes verlangen, muss $\alpha_{1m} = 0$ gelten ($m = -1, 0, +1$)!

(c) $\ell = 2$

Der Quadrupolterm ist der erste der mitgenommen wird. Es wird sich erweisen, dass die kollektiven Spektren grösstenteils durch Quadrupolschwingung beschrieben werden können (siehe Kapitel IV).

(d) $\ell > 2$

Die nächst höheren Terme wären $\ell = 3$ (Oktupolschwingung) und $\ell = 4$ (Hexadekupolschwingung). Hier setzt eine Näherung des Modells ein, indem alle höheren Multipolanteile ($\ell > 2$) vernachlässigt werden. Obwohl Oktupolspektren gemessen wurden(4), genügt es sich auf den Quadrupolterm zu beschränken, da die gemessenen Oktupolzustände negative Parität haben. Auch Hexadekupolmomente wurden gemessen, allerdings sind sie sehr schwach!

Mit dieser Näherung hat der Radius des Kerns nun folgende Entwicklung:

$$R = R_0 \left(1 + \sum_m \alpha_{2m} Y_{2m}^*(\vartheta, \varphi) \right) \quad (\text{I.4})$$

Aus der Bedingung, dass R reell ist und den Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen Y_{2m} , die die Komponenten eines sphärischen Tensors zum Drehimpuls $\ell = 2$ sind(1), folgt für α_{2m} :

i) Paritätstransformation

$$P^{-1} \alpha_{2m} P = (-1)^2 \alpha_{2m} = +\alpha_{2m}, \quad (\text{I.5a})$$

d.h. α_{2m} und damit die Zustände des Spektrums haben positive Parität.

ii) Konjugiert komplexes α_{2m} :

$$\alpha_{2m}^* = (-1)^m \alpha_{2-m} \quad (\text{I.5b})$$

Dies sind dieselben Eigenschaften wie bei den Komponenten der Funktionen Y_{2m} , d.h. α_{2m} sind die Komponenten eines sphärischen Tensors $\alpha^{(2)}$. Da α_{2m} ($m=-2,-1,0,+1,+2$) die Oberflächenbewegung des Kerns beschreibt, sind sie die generalisierten Koordinaten des Systems! Die zu ihnen konjugierten kanonischen Impulsen werden, wie üblich, durch eine Kommutationsrelation definiert:

$$[\pi_{2m}, \alpha_{2m'}] = -i\hbar \delta_{mm'} \quad (\text{I.6})$$

Dabei gelten anstatt (I.5b):

$$\pi_{2m}^* = -(-1)^m \pi_{2-m} \quad (\text{I.7a})$$

und das gleiche wie in (I.5a):

$$P^{-1} \pi_{2m} P = \pi_{2m} \quad (\text{I.7b})$$

Die obigen Betrachtungen fanden alle im Laborsystem statt. Es ist für die Anwendung einfacher eine Transformation in ein Hauptachsensystem des Kerns überzugehen. Wenn a_{2m} die Komponenten von $\alpha^{(2)}$ in diesem System sind und unter Berücksichtigung, dass α_{2m} sich wie $Y_{2m}(\mathcal{V}, \varphi)$ transformiert, gilt

$$a_{2m} = \sum_{m'} D_{m'm}^2(\mathcal{V}_j) \alpha_{2m'}. \quad (\text{I.8a})$$

$\mathcal{V}_j$ sind die Eulerwinkel, welche die Orientierung des Kerns relativ zum Laborsystem angeben.

Für die Komponenten des Impulses im intrinsischen System gilt

$$p_{2m} = \sum_{m'} D_{mm'}^{2*}(\vartheta_j^i) \pi_{2m'} \quad (\text{I.8b})$$

d.h. π_{2m} transformiert sich kontragredient zu α_{2m} !

Im körperfesten System haben die Komponenten einfachere Eigenschaften(1):

$$\begin{aligned} a_{20} &= \beta \cos \gamma \\ a_{2-2} = a_{22} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma \\ a_{2-1} = a_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

Nur drei Komponenten sind von Null verschieden und davon nur zwei linear unabhängig, z.B. $a_{20} \equiv a_0$ und $a_{22} \equiv a_2$. Zusammen mit den drei Eulerwinkel gibt es nach wie vor fünf generalisierte Koordinaten. a_0 und a_2 beschreiben die eigentliche Deformation des Kerns und sie bilden ein kartesisches Koordinatensystem (siehe Fig.I.3), in dem jeder Punkt einen Deformationszustand angibt.

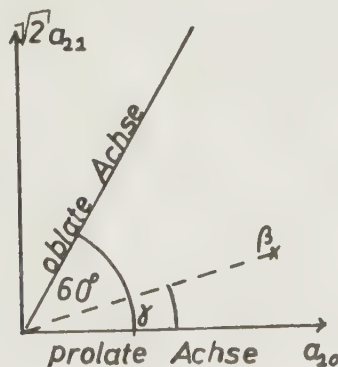


Fig.I.3

Wie in (I.9) angedeutet ist, können ''quasi'' Polarkoor-

dinaten β und γ eingeführt werden. β gibt den Abstand vom Nullpunkt (dort ist der Kern sphärisch) und somit die Deformation an. Auf der positiven a_0 -Achse liegen alle axialsymmetrische Kerne, wo die Hauptträgheitsachse in z-Richtung grösser ist als die in x und y, d.h. dort ist der Kern prolat (zigarrenförmig) deformiert. γ gibt die Abweichung von der axialsymmetrischen Form an. Die grösste Abweichung liegt bei $\gamma = 30^\circ$ und die Deformation geht bei $\gamma = 60^\circ$ wieder in eine axialsymmetrische Form über, diesmal eine oblate (diskusförmig).

Nun ist die Wahl des intrinsischen Systems nicht eindeutig(1): z.B. führt eine 90° -Drehung wieder zu einem gleichberechtigten System. Es existieren somit Symmetrietransformationen, die (β, γ) in ein anderes Wertepaar (β', γ') überführt, das aber zu der selben physikalischen Deformation gehört. Wie in den Ref.(1,5) gezeigt ist, gibt es zwei fundamentale Symmetrietransformationen (T_1, T_2), aus denen alle anderen zusammengesetzt sind:

$$T_1(\beta, \gamma) = (\beta, -\gamma) \quad (\text{I.10a})$$

$$T_2(\beta, \gamma) = (\beta, \gamma - \frac{2\pi}{3}) \quad (\text{I.10b})$$

Eine Spiegelung an der a_0 -Achse und eine Drehung um 120° führen zu äquivalenten Punkten. Aus diesem Grunde genügt es in der (a_0, a_2) -Ebene den 60° -Sektor zu betrachten, da alle anderen Punkte mittels (I.10a,b) aus den entsprechenden Punkten des 60° -Sektors erreicht werden können. Die anderen Sektoren entsprechen anderen Orientierungen des Kerns im Raum und bieten somit keine neuen Eigenschaften!

(2) Der kollektive Hamiltonoperator

Der nächste Schritt ist den Hamiltonoperator des Problems zu bestimmen. Er muss eine Funktion von α_{2m} und π_{2m} sein und weiter folgende Eigenschaften besitzen:

- (a) Er muss unter Drehungen invariant sein (d.h. ein Skalar: $L=0$).
- (b) Die Parität soll erhalten bleiben.
- (c) Er soll zeitumkehrinvariant sein.

Punkt (a) ist leicht zu erfüllen, indem nur Kopplungen der $\alpha^{[2]}$ und $\pi^{[2]}$ -Tensoren zum Drehimpuls Null verwendet werden. Punkt (b) ist automatisch erfüllt, da wegen (I.5a) und (I.7b) $\alpha^{[2]}$ und $\pi^{[2]}$ positive Parität besitzen und damit auch der ganze Hamiltonoperator. Durch Punkt (c) erhält man eine weitere Einschränkung: Wegen (I.7a) kommt beim π -Tensor ein zusätzliches Minuszeichen herein. Anschaulich bedeutet dies das gleiche wie beim normalen linearen Impuls ' p ', dass nämlich die Richtung des Impulses bei Zeitumkehr umgedreht wird ($TpT = -p$). Aus diesem Grunde darf der Hamiltonoperator nur aus einer geraden Anzahl von Impulsen bestehen ($\pi^2, \pi^4, \pi^6, \dots$), damit Zeitumkehrinvarianz erfüllt ist. Zunächst wird das Potential betrachtet:

(a) Potential

Es darf nur von den generalisierten Koordinaten α_{2m} ($m=-2, -1, 0, +1, +2$) abhängen. Wie in den Ref.(1,5,6) gezeigt ist, existieren nur zwei fundamentale skalare Kopplungen der α 's, mit denen alle anderen konstruiert werden können. Es

sind dies

$$I_2 = [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} = \frac{1}{\sqrt{5}} \beta^2 \quad (\text{I.11a})$$

$$I_3 = [[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} = -\sqrt{\frac{2}{35}} \beta^3 \cos 3\gamma \quad (\text{I.11b})$$

Sie sind in (I.11a,b) auch gleichzeitig in der (β, γ) -Darstellung angegeben. Die Vorfaktoren folgen aus den Eigenschaften der Clebsch-Gordan-Koeffizienten. Das Potential muss also eine Funktion in I_2 und I_3 oder β und $\cos 3\gamma$ sein:

$$\tilde{V}(I_2, I_3) \quad \text{oder} \quad V(\beta, \cos 3\gamma) \quad (\text{I.11c})$$

In dieser Arbeit wurde das Potential als Funktion von β und $\cos 3\gamma$ benutzt, da dies eine grössere Variabilität des Potentials zulässt und daraus sofort die Potentialenergiefläche herausgelesen werden kann. (I.11c) wird in eine Potenzreihe in β und $\cos 3\gamma$ entwickelt:

$$V(\beta, \cos 3\gamma) = \sum_{\varrho, \mu} V_{\varrho, \mu} \beta^{\varrho} (\cos 3\gamma)^{\mu} \quad (\text{I.12})$$

Aus computertechnischen Gründen wurde ϱ und μ beschränkt:

$$2 \leq \varrho \leq 10$$

$$0 \leq \mu \leq 4$$

$\varrho=0$ wurde deshalb weggelassen da für $\varrho=0, \mu=0$ nur eine Konstante vorliegt und für $\varrho=0, \mu \neq 0$ am Ursprung ($\beta=0$) der Potentialwert wegen $(\cos 3\gamma)^{\mu}$ unbestimmt ist. $\varrho=1$ entspricht einem spitzen Verlauf am Ursprung, der ebenfalls nicht vorkommen soll, da das Potential möglichst glatt verlaufen soll. Er kann aber bei Bedarf noch eingefügt werden.

In den Figuren (I.4a,b) sind die Potentialenergiefläche (PES) für einen typischen Vibrator (Fig.I.4a) und einen typischen Rotator (Fig.I.4b) aufgezeigt. Beim Vibrator

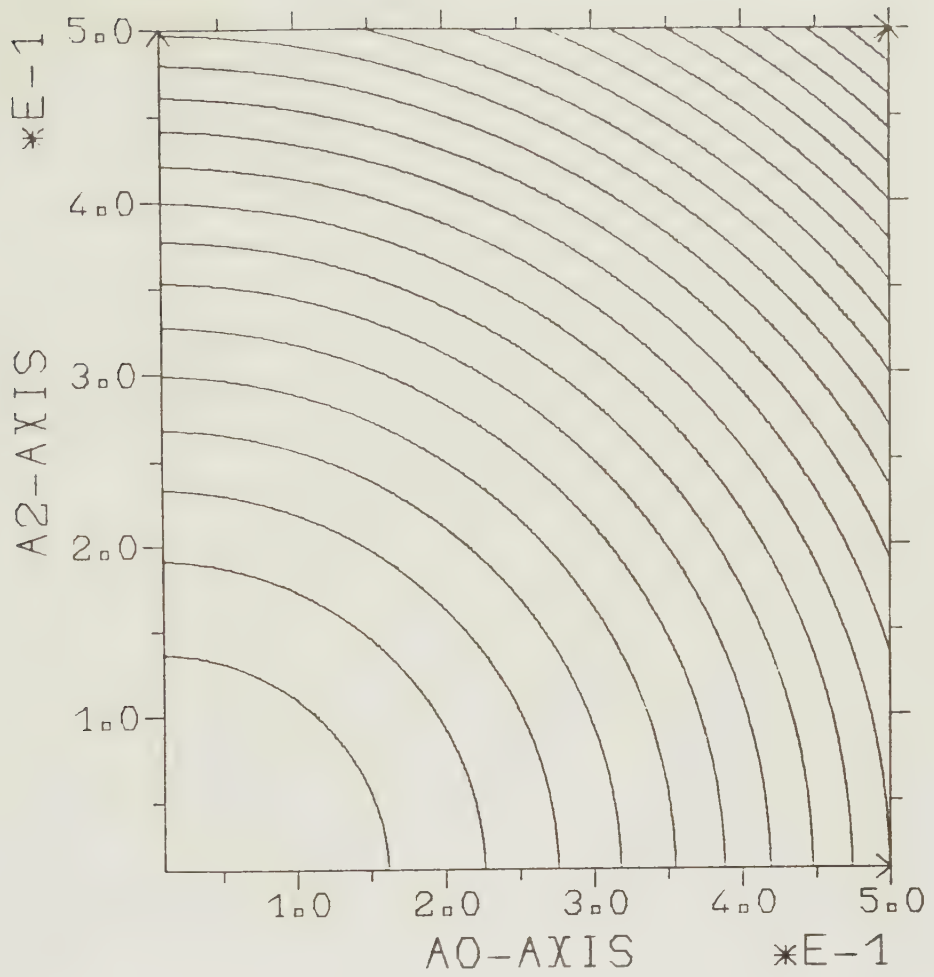


Fig.I.4a

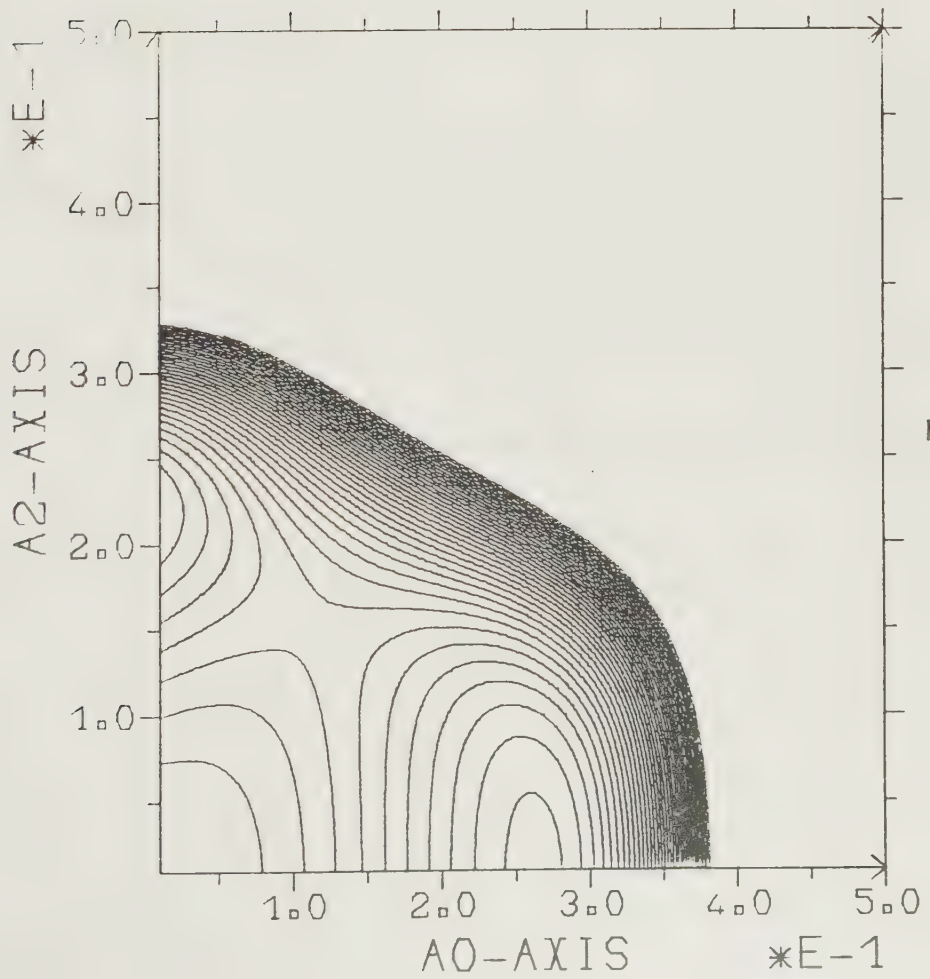


Fig.I.4b

befindet sich das Minimum bei $\beta=0$ und beim Rotator bei $\beta \neq 0$. Wie in Kapitel IV anhand von Beispielen gezeigt wird, wird die Physik der kollektiven Bewegung durch solche PES charakterisiert. Die Lage des Minimums, die Steifheit des Potentials und einige andere Eigenschaften bestimmen das Spektrum. Es ist deshalb nicht richtig die Koeffizienten in (I.12), die im folgenden als 'Parameter' bezeichnet werden, als reale Parameter zu betrachten. Sie sind über die Eigenschaften der PES stark miteinander verknüpft, sodass sie nicht als linear unabhängig anzusehen sind. Es ist am besten (I.12) als Potenzreihenentwicklung von (I.11) anzusehen, wobei die realen Parameter in (I.11) verschlüsselt enthalten sind und diese man aus der PES herauslesen kann (Lage des Minimums etc.).

Das Potential (I.12) enthält als Grenzfall das Gneuss-Potential(5):

$$\begin{aligned}
 V_6 = & C_2 [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} + C_3 \left([\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right)^{[0]} + \\
 & + C_4 \left([\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \right)^2 + C_5 \left([\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right)^{[0]} [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} + \\
 & + C_6 \left(\left([\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right)^{[0]} \right)^2 + D_6 \left([\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \right)^3 = \quad (I.12:) \\
 = & \frac{C_2}{15} \beta^2 - \sqrt{\frac{2}{35}} C_3 \beta^3 \cos 3\gamma + \frac{C_4}{5} \beta^4 - \sqrt{\frac{2}{175}} C_5 \beta^5 \cos 3\gamma + \\
 & + \left(\frac{2}{35} \right) C_6 \beta^6 (\cos 3\gamma)^2 + \frac{D_6}{5\sqrt{5}} \beta^6
 \end{aligned}$$

Dies ist eine polynomiale Entwicklung in α . Im neuen Potential hingegen sind auch nichtpolynomiale Terme enthalten, wie z.B.

$$\begin{aligned}
 \frac{\left(\left([\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right)^{[0]} \right)^2}{[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]}} & \sim \beta^4 (\cos 3\gamma)^2 \\
 [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \sqrt{[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]}} & \sim \beta^3
 \end{aligned}$$

Der Vorteil der neuen Darstellung ist, dass beliebige PES konstruiert werden können, indem eine vorgegebene Funktion in die Potenzreihe (I.12) entwickelt wird.

(b) Kinetische Energie

Hier wird wieder die (π, α) -Darstellung gewählt, da π ein komplizierter Ausdruck in β, γ und (γ_j) ist. In Kapitel II wird sich auch glücklicherweise herausstellen, dass die Matrixelemente der in (I.14) angegebenen kinetischen Energie proportional sind zu den entsprechenden Matrixelementen in β^2 , $\beta^3 \cos 3\gamma$ und β^4 . Der einfachste Ansatz ist der harmonische

$$P_2 [\pi^{[2]} \times \pi^{[2]}]^{[0]} \quad \text{mit} \quad P_2 = \frac{\sqrt{5}}{2 B_2} \quad (\text{I.13})$$

Dazu werden noch weitere α -abhängige Terme hinzugefügt, die deformationsabhängige Massen erzeugen.

$$T = P_2 [\pi^{[2]} \times \pi^{[2]}]^{[0]} + \frac{P_3}{3} \left\{ \left[[\pi^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \pi^{[2]} \right]^{[0]} \right\} + \frac{P_4}{6} \left\{ [\pi^{[2]} \times \pi^{[2]}]^{[0]} [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \right\} \quad (\text{I.14})$$

Die geschweifte Klammer soll eine Permutation aller π und α angeben, d.h.

$$\begin{aligned} \left\{ \left[[\pi^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \pi^{[2]} \right]^{[0]} \right\} &= \left[[\pi^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \pi^{[2]} \right]^{[0]} + \\ &+ \left[[\alpha^{[2]} \times \pi^{[2]}]^{[2]} \times \pi^{[2]} \right]^{[0]} + \left[[\pi^{[2]} \times \pi^{[2]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} \end{aligned} \quad (\text{I.15a})$$

$$\begin{aligned}
& \{ [\pi^{[2]}_x \pi^{[2]}]^{[0]} [\alpha^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[0]} \} = [\pi^{[2]}_x \pi^{[2]}]^{[0]} [\alpha^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[0]} + \\
& + [\alpha^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[0]} [\pi^{[2]}_x \pi^{[2]}]^{[0]} + [\alpha^{[2]}_x \pi^{[2]}]^{[0]} [\pi^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[0]} + \\
& + [\pi^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[0]} [\alpha^{[2]}_x \pi^{[2]}]^{[0]} + [\pi^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[0]} [\pi^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[0]} + \\
& + [\alpha^{[2]}_x \pi^{[2]}]^{[0]} [\alpha^{[2]}_x \pi^{[2]}]^{[0]}
\end{aligned} \quad (I.15b)$$

Damit ist die Hermitezität von 'T' gewährleistet, obwohl z.B. bei (I.15a) die Matrixelemente die gleichen wären wie bei $3[\pi^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[2]}_x \pi^{[2]}]^{[0]}$ alleine (7). Die in (I.15a,b) gewählte Schreibweise ermöglicht aber eine einfachere Bestimmung der Matrixelemente (7) deren Ergebnisse in Kapitel IV angegeben sind.

In sehr vielen Publikationen und Arbeiten (5,8,9) wurde anstatt des P_4 -Termes ein komplizierterer Ausdruck verwendet:

$$\sum_l \frac{\tilde{P}_{4l}}{6} \{ [[\pi^{[2]}_x \pi^{[2]}]^{[2]}_x [\alpha^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[0]}]^{[0]} \} \quad (I.16)$$

Wie in Anhang (K) aber gezeigt wird, kann dies auf den $\tilde{P}_{40}$ -Term beschränkt werden, wenn nur die Matrixelemente betrachtet werden.

Höhere Ordnungsterme in π , wie z.B. $([\pi^{[2]}_x \pi^{[2]}]^{[0]})^2$ könnten zwar mitgenommen werden, eine einfache physikalische Überlegung schliesst sie allerdings aus: Höhere Terme in $\pi^{[2]}$ entsprechen entweder relativistischen Korrekturen oder einem nichtlokalen Potential (2). Da die kollektive Bewegung nicht-relativistisch verläuft und nichtlokale Potentiale ausgeschlossen werden, fallen somit höhere Ordnungsterme in weg.

Zusammengefasst hat der kollektive Hamiltonoperator die folgende Form:

$$H = T + V$$

$$\begin{aligned}
T = & P_2 [\pi^{[2]}_x \pi^{[2]}]^{[0]} + \frac{P_3}{3} \{ [\pi^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[2]}_x \pi^{[2]}]^{[0]} \} + \\
& + \frac{P_4}{6} \{ [\pi^{[2]}_x \pi^{[2]}]^{[0]} [\alpha^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[0]} \}
\end{aligned}$$

(I.17)

(3) Quadrupoloperator

Die Komponenten des Quadrupoloperators sind

$$Q_{2m} = \int_{\text{Kern}} \rho(r) r^2 Y_{2m}(\vartheta, \varphi) dV, \text{ mit } dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi \quad (\text{I.18})$$

Einige Annahmen vereinfachen (I.18):

- (a) Homogene Ladungsverteilung
- (b) Inkompressibilität bis zu quadratischen Gliedern in α_{2m} .
- (c) Entwicklung von Q_{2m} bis zur 2. Ordnung in α_{2m} .

Schwerpunktserhaltung ist wegen $\int r Y_{2m} dV = 0$ immer erfüllt, sodass diese Forderung nicht explizit angegeben werden muss. Aus den Punkten (a)-(c) erhalten wir:

- (a) Die als konstant angenommene Kernladungsdichte ist durch

$$\rho_0 = \frac{3Z}{4\pi R_0^3} e \quad (\text{I.19a})$$

mit $R_0 = 1.1 A^{1/3} \text{ fm}$ gegeben. Im weiteren Verlauf wird ρ_0 in Einheiten der Elementarladung pro Volumen angegeben, sodass

$$\rho_0 = \frac{3Z}{4\pi R_0^3} \quad (\text{I.19b})$$

ist.

- (b) Um Volumenkonstanz

$$\int_{\text{Kern}} dV = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \quad (\text{I.20})$$

sicherzustellen, muss in (I.3) ein Korrekturglied "g"

eingeführt werden: ($g \equiv \alpha_{00}$)

$$R = R_0 \left(1 + g + \sum_m \alpha_{2m} Y_{2m}^*(\psi, \varphi) \right) \quad (I.21)$$

Wird dies beim Ausrechnen von (I.20) benutzt, so folgt für g (5,7)

$$g = - \frac{\sqrt{5}}{4\pi} [\alpha^{[2]}_X \alpha^{[2]}]^{[0]} \quad (I.22)$$

(c) Wird (I.19b) und (I.21) beim Berechnen von (I.18) verwendet und alle höheren Terme als quadratisch in vernachlässigt, so ist das Endergebnis (5,7):

$$Q_{2m} = g_0 R_0^5 \left(\alpha_{2m} - \frac{10}{\sqrt{70\pi}} [\alpha^{[2]}_X \alpha^{[2]}]^{[2]}_m \right) \quad (I.23)$$

Die BE2-Werte und das Quadrupolmoment sind wie folgt definiert (1,5,7):

$$\begin{aligned} B(E2; \gamma' l' \rightarrow \gamma'' l'') &= \frac{1}{2l'+1} \sum_{m m' m''} |\langle \gamma'' l'' m'' | Q_{2m} | \gamma' l' m' \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2l'+1} |\langle \gamma'' l'' || Q_2 || \gamma' l' \rangle|^2 \end{aligned} \quad (I.24a)$$

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle \gamma L M=L | Q_{20} | \gamma L M=L \rangle = \\ &= \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \begin{pmatrix} L & 0 & L \\ -L & 0 & L \end{pmatrix} \langle \gamma L || Q_2 || \gamma L \rangle \end{aligned} \quad (I.24b)$$

γ (bzw. γ' und γ'') ist eine Abkürzung der restlichen Quantenzahlen der Wellenfunktion. $\langle \gamma' L' || Q_2 || \gamma L \rangle$ sind die reduzierten Matrixelemente des Quadrupoloperators (I.23), die durch das Wigner-Eckart Theorem (10,11), das in (I.24a,b) benutzt wurde, bestimmt sind.

Das Wigner-Eckart Theorem für den Übergang $l' \rightarrow l''$ lautet (10),

$$\langle \gamma'' l'' m'' | Q_{2m} | \gamma' l' m' \rangle = (-1)^{l''-m''} \begin{pmatrix} l'' & 2 & l' \\ -m'' & m & m' \end{pmatrix} \langle \gamma'' l'' || Q_2 || \gamma' l' \rangle$$

Daraus ergibt sich für den zeitumgekehrten Übergang $l'' \rightarrow l'$:

$$\langle \gamma' l' || Q_2 || \gamma'' l'' \rangle = (-1)^{l''-l'} \langle \gamma'' l'' || Q_2 || \gamma' l' \rangle$$

Damit ist der Hamiltonoperator und der Quadrupoloperator konstruiert. Diese werden jetzt dazu verwendet Energiespektren, BE2-Werte und Quadrupolmomente von Kernen zu berechnen und diese mit dem Experiment zu vergleichen. Leider ist die Schrödingergleichung des Hamiltonoperators nicht analytisch lösbar, sodass ein numerisches Verfahren verwendet werden muss. Hier sei nur erwähnt, dass eine Basis aufgesucht wird, in dieser Basis die Matrixelemente von H berechnet und die so erhaltene Hamiltonmatrix diagonalisiert wird. Als Endprodukt erhalten wir die berechneten Energien und die Entwicklungskoeffizienten der Wellenfunktion in dieser Basis.

Was ist nun das Ziel des Kollektivmodells?

In der Einleitung ist schon erwähnt worden, dass das Modell sehr allgemein konstruiert ist und alle Grenzfälle (Vibrator, Rotator, γ -instabile Kerne, etc.) enthalten soll! Für alle möglichen Kerne (ab ca. Ca) sollen die Massenparameter und die Potentialenergiefläche (PES) bestimmt werden. Das so erhaltene "Periodensystem der PES" liefert einen Überblick auf die systematischen Veränderungen der kollektiven Eigenschaften. Besonderheiten, wie z.B. Nebenminima, lassen sich so übersichtlich analysieren. Ihre Entwicklung kann über mehrere Isotope hinweg beobachtet werden.

Auch andere systematische Veränderungen können über weite Bereiche betrachtet werden.

Mikroskopische Modelle, die kollektive Spektren beschreiben wollen, können dann anhand der Ergebnisse des generalisierten Kollektivmodells verglichen und auf ihre Gültigkeit hin untersucht werden.

Das kollektive Modell soll weiterhin ein Verfahren sein, mit dem ohne zu grossen numerischen Aufwand ein Teil des gemessenen Kernspektrums, nämlich das kollektive, einfach und übersichtlich berechnet und erklärt werden kann. Es erhebt keinen Anspruch darauf exakt zu sein, es soll nur die Zustände beschreiben, die dominierend kollektiven Charakters sind!

(II) Gruppentheorie des Kollektivmodells und Basisproblem

(A) Wesentliche Begriffe aus der Gruppentheorie

Es werden zunächst die nötigen Begriffe behandelt, die später zum direkten oder indirekten Verständnis benötigt werden, wenn die Eigenfunktionen des 5-dimensionalen harmonischen Oszillators klassifiziert und konstruiert werden. Zunächst wird der Begriff der Gruppe definiert (speziell die kontinuierliche), und danach werden die infinitesimalen Transformationen und die Lie-Algebren behandelt. Anschliessend werden die unitären und orthogonalen Gruppen definiert, welche spezielle kontinuierliche Gruppen sind. Die letzteren sind wichtig für die Klassifizierung der Oszillatorfunktionen. Für nähere Betrachtungen sei auf die entsprechende Literatur verwiesen (12,13,14).

(1) Definition der Gruppe (kontinuierliche Gruppen)

Definition einer Gruppe

Eine Menge von Elementen $G=(g_1, \dots, g_n, \dots)$ bilden eine Gruppe, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(a) Abgeschlossenheit

Eine Verknüpfung zweier Elemente $g_1 \circ g_2$ soll wieder ein Element der Gruppe sein, d.h. die Gruppe soll unter dieser Operation abgeschlossen sein.

(b) Assoziativität

$$g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$$

(c) Existenz des neutralen Elements ''e''

$$g \circ e = g$$

(d) Existenz des inversen Elements ''g⁻¹''

$$g \circ g^{-1} = e$$

(d) Die Gruppe wird kommutativ oder abelsch genannt, wenn

die Gruppenelemente kommutieren:

$$g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$$

Wenn eine Untermenge G' der Gruppe G ($G' \subset G$) ebenfalls den obigen Bedingungen genügt, d.h. ebenfalls eine Gruppe ist, dann wird G' eine Untergruppe von G genannt.

Hängen die Gruppenelemente g_m von r Parameter $(a^i) := (a^1, \dots, a^r)$ ab, die sich kontinuierlich verändern, dann spricht man von einer kontinuierlichen Gruppe, wobei " r " die Ordnung der Gruppe ist. Ist der Bereich, den die Parameter ausfüllen, abgeschlossen und beschränkt, d.h. kompakt, dann liegt eine kompakte Gruppe vor.

Meistens werden die Gruppenoperationen auf einen Vektorraum (wie z.B. der uns umgebene 3-dim. Raum) angewendet. Dies bedeutet, dass ein Vektor $\vec{x} = (x^i)$ mittels der Gruppenoperation $g = (a^i)$ auf einen anderen $\vec{x}' = (x'^i)$ transformiert wird:

$$\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x}, (a^i))$$

Diese Transformation wird durch eine noch zu bestimmende Funktion $\vec{f}$ dargestellt. Das Produkt zweier hintereinander ausgeführter Transformationen ($g_1 = (a^i)$, $g_2 = (b^i)$, $g_1 \circ g_2 = g_3 = (c^i)$) wird dann durch

$$\vec{x}'' = \vec{f}(\vec{x}', (b^i)) = \vec{f}(\vec{f}(\vec{x}, (a^i)), (b^i)) = \vec{f}(\vec{x}, (c^i))$$

dargestellt.

Die obigen Definitionen sollen nun an einigen Beispielen demonstriert werden:

(a) Translationsgruppe in einer Dimension

Die Translation eines Punktes x_0 nach $x'_0 = f(x_0, a) = x_0 + a$ wird durch den Parameter a beschrieben (siehe Fig. II.1).

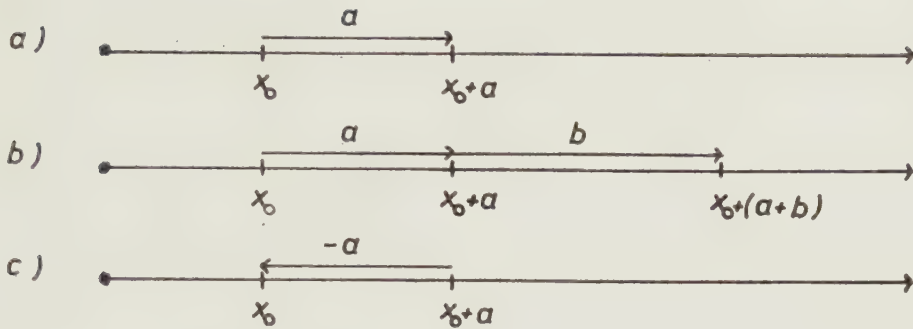


Fig.II.1

Es ist leicht zu sehen, dass alle Gruppenrelationen erfüllt sind:

Abgeschlossenheit: $(x_0 + a) + b = x_0 + (a + b) = x_0 + c$

Assoziativität: $x_0 + (a + b) + c = x_0 + a + (b + c)$

Neutrales Element: $x_0 + 0 = x_0$

Inverses Element: $x_0 + a + (-a) = x_0$

Die Ordnung der Gruppe ist 1.

(b) Drehung um eine Achse

Betrachten wir Punkte auf einem Kreisrand mit dem Radius 1. durch die Mitte des Kreises denken wir uns eine Achse, mit der die ganze Anordnung gedreht werden kann. Eine Drehung um den Winkel (=Parameter) bewirkt, dass ein Punkt (x, y) auf den Kreisrand in einen anderen überführt wird (siehe Fig. II.2)

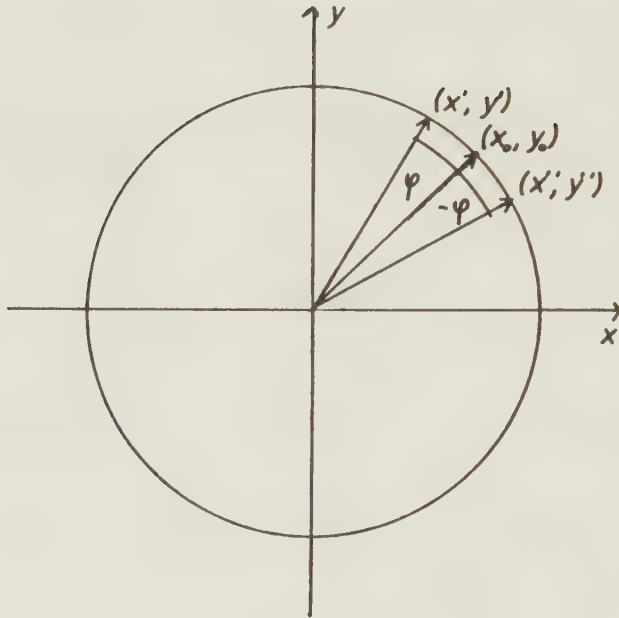


Fig. II.2

Diese Transformation wird durch die bekannte Matrix

$$g = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

beschrieben. Abgeschlossenheit:

$$\begin{aligned} g_1(\varphi_1) \circ g_2(\varphi_2) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{pmatrix} = \\ &= g(\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2) \end{aligned}$$

Die Assoziativität ist ebenfalls durch einfaches Nachrechnen, unter Verwendung der Additionsregeln für sin und cos, zu überprüfen. neutrales Element:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

inverses Element:

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix}$$

Da die Drehung durch einen Parameter φ beschrieben wird, ist die Ordnung der Gruppe gleich 1.

Die obigen Beispiele beschreiben Gruppen, wo alle Gruppenelemente durch kontinuierliche Veränderung erreicht werden konnten.

Nun gibt es Beispiele von Gruppen, deren Gruppenelemente nicht durch eine kontinuierliche Transformation der Parameter verbunden werden können:

Nehmen wir bei der Drehgruppe (Beispiel b) zu den Elementen

$$g = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

noch alle diejenigen hinzu, die aus g durch Anwendung des Spiegelungsoperators

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

hervorgehen, also

$$\tilde{g} = Pg = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ -\sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

Die Mengen aller Matrizen g und $\tilde{g}$ bilden zusammen ebenfalls eine Gruppe, sie unterscheiden sich aber in einem wesentlichen Punkte:

$$\det(g) = +1$$

$$\det(\tilde{g}) = -1$$

Durch eine kontinuierliche Veränderung des Parameters φ kann nicht g in $\tilde{g}$ übergehen, da dabei stets der Wert der Determinante (+1 oder -1) beibehalten wird.

Für die Gruppe hat dies folgende Konsequenzen: Der Parameterbereich zerfällt in zwei Mengen, die vollkommen voneinander getrennt sind. Der eine Bereich, zu dem g gehört, beschreibt reine Drehungen. Da in ihm das Einselement $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ enthalten ist, dessen Determinante gleich +1 ist, bilden die Elemente g eine Gruppe. Daneben gibt es einen zweiten Bereich, der vom ersten nur durch Anwendung der Inversionsmatrix P erreicht werden kann. Er enthält nicht das neutrale Element, d.h. alleine betrachtet bilden die

Transformationen mit der Determinante -1 keine Gruppe!
(Siehe Fig. II.3)

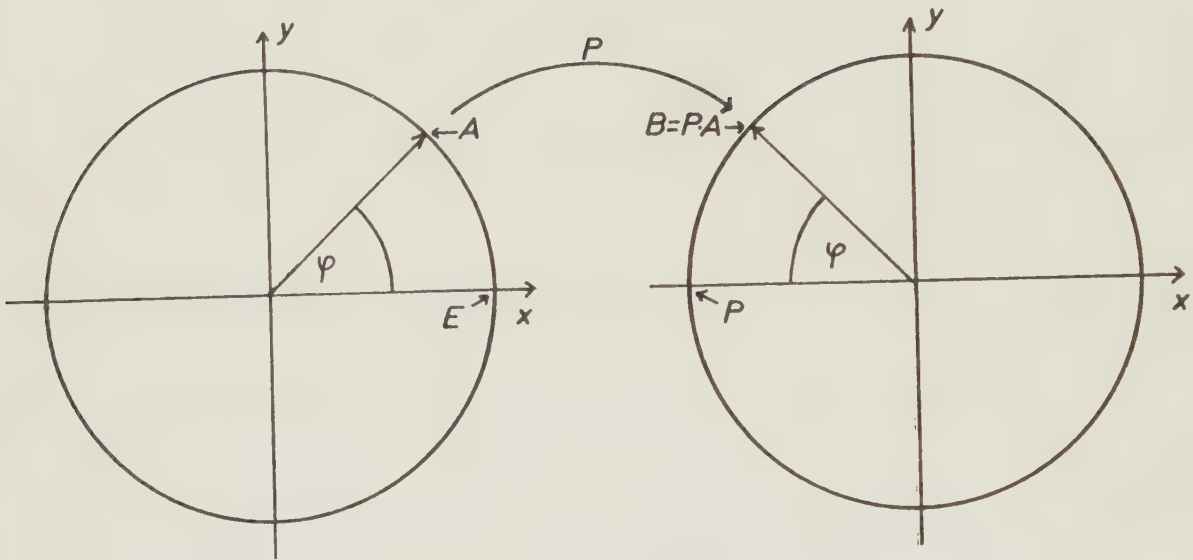


Fig. II.3

Diese Betrachtungen können nun auf beliebige Gruppen verallgemeinert werden: Man unterteilt den Parameterbereich der Gruppe in mehrere untereinander getrennte Bereiche. Einer von ihnen enthält das Einselement E und bildet somit eine Untergruppe U . Von ihr können durch diskrete Operationen $P_1, \dots, P_n$ alle anderen Bereiche erreicht werden. (Siehe dazu Fig II.4)

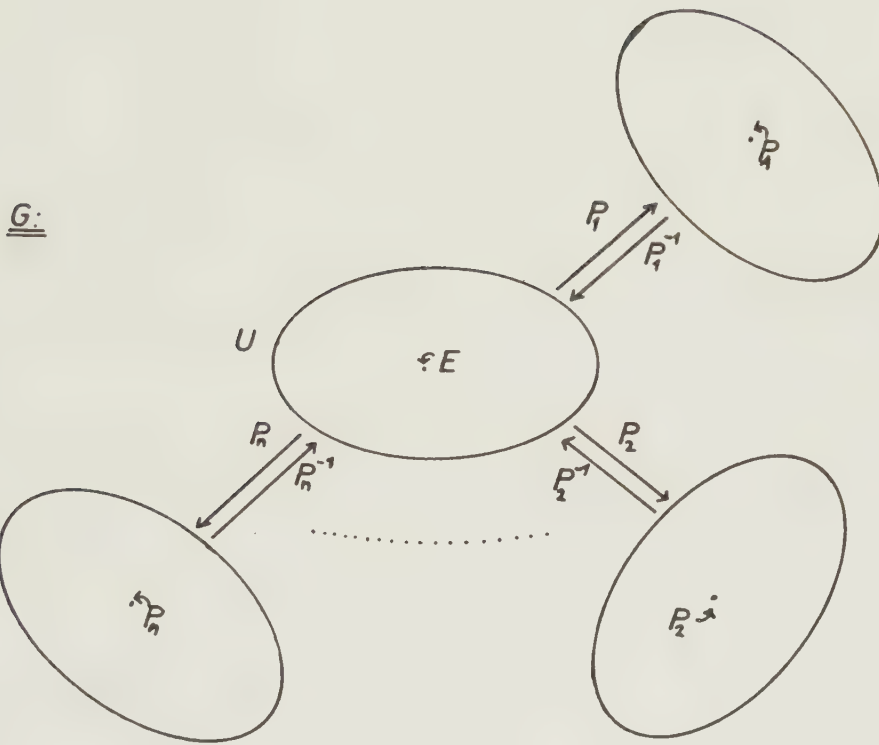


Fig. II.4

Sind diese diskreten Operatoren bekannt, so genügt es vollkommen, bei Untersuchungen der Gruppe sich auf U zu beschränken, denn ist U bekannt, so lässt sich mit $P_1, \dots, P_n$ daraus die ganze Gruppe konstruieren. U wird als Zusammenhangskomponente bezeichnet.

Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass es genügt einen noch kleineren Teil der Gruppe zu untersuchen, aus dem die ganze Gruppe konstruiert werden kann. Dies vereinfacht die Behandlung und Klassifizierung von kontinuierlichen Gruppen!

(2) Infinitesimale Transformationen, Lie-Algebren

Ein weiterer wichtiger Schritt zur Behandlung kontinuierlicher Gruppen war die Erkenntnis von Lie, dass es genügt, den Bereich in der Nähe des neutralen Elementes zu betrachten. Alle wichtigen Eigenschaften der Gruppe sind bereits dort bekannt. Durch ein Verfahren, welches weiter unten erwähnt wird, gelangt man zu allen anderen Gruppenelementen der Zusammenhangskomponente (12).

Betrachten wir eine Transformation eines Punktes $\vec{x}$ nach $\vec{x}'$, welche durch die Funktion $\vec{f}(\vec{x}, (a^i))$ beschrieben wird. Diese Funktion wird nun in eine Taylorreihe um den Punkt $(a^i) = (0)$ (neutrales Element) entwickelt:

$$\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x}, (a^i)) \Big|_{(a^i)=0} + \delta a^i \cdot \vec{\nabla}_a \vec{f} + O(a^2)$$

$\vec{\nabla}_a$ ist der Gradient im Parameterraum ($\vec{\nabla}_a = (\frac{\partial}{\partial a^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial a^r})$). Liegt eine infinitesimale Transformation vor, vom Punkt $\vec{x}$ nach $\vec{x}' = \vec{x} + d\vec{x}$ ($\vec{a} \rightarrow \delta \vec{a}$), so können die höheren Terme von quadratischer Ordnung in $\delta \vec{a}$ vernachlässigt werden, d.h.:

$$\vec{x} + d\vec{x} = \vec{f}(\vec{x}, (a^i)) \Big|_{(a^i)=0} + \delta a^i \cdot \vec{\nabla}_a \vec{f}$$

oder komponentenweise ($\vec{x} = \vec{f}(\vec{x}, (a^i)) \Big|_{(a^i)=0}$)

$$x^k + dx^k = x^k + \sum_i \delta a^i \frac{\partial}{\partial a^i} f^k(\vec{x}, (a^i)) \Big|_{(a^i)=0}, \text{ d.h.}$$

$$dx^k = \sum_i \delta a^i \frac{\partial}{\partial a^i} f^k(\vec{x}, (a^i)) \Big|_{(a^i)=0}$$

Mit der Definition $u^k_\alpha(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial a^\alpha} f^k(\vec{x}, (a^i)) \Big|_{(a^i)=0}$ nimmt $d\vec{x}$ die folgende Form an:

$$dx^k = \sum_\alpha u^k_\alpha \delta a^\alpha \quad (\text{II.1})$$

Bei einer infinitesimalen Transformation ist die Änderung einer beliebigen Funktion $F(x)$ durch das totale Differential

$dF(\vec{x})$ gegeben. Wird dabei (II.1) verwendet, so gilt (7.12):

$$\begin{aligned} dF(\vec{x}) &= \sum_k \frac{\partial F(\vec{x})}{\partial x^k} dx^k = \sum_k \sum_\sigma \delta a^\sigma U_\sigma^k(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x^k} F(\vec{x}) = \\ &= \sum_\sigma \delta a^\sigma X_\sigma F(\vec{x}) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

mit $X_\sigma = \sum_i U_\sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

D.h. die infinitesimale Änderung von $F(\vec{x})$ wird durch die Parameter δa^σ und die Operatoren X_σ beschrieben, die als Erzeugende der Gruppe bezeichnet werden.

Beispiel: Als Beispiel wird wieder die Drehung um eine Achse betrachtet. Die Transformationsgleichung von einem Punkt (x, y) nach (x', y') lauten

$$x' = f^x(x, y, \varphi) = (\cos \varphi)x - (\sin \varphi)y$$

$$y' = f^y(x, y, \varphi) = (\sin \varphi)x + (\cos \varphi)y$$

Die Funktionen u_φ^x und u_φ^y werden nach der in (II.1) gegebenen Definition berechnet:

$$u_\varphi^x = \left. \frac{\partial f^x}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = -y$$

$$u_\varphi^y = \left. \frac{\partial f^y}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = x$$

Nach (II.2) ergibt sich daraus die Erzeugende der Drehung um die z-Achse:

$$X_{\varphi_z} = u_\varphi^x \frac{\partial}{\partial x} + u_\varphi^y \frac{\partial}{\partial y} = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} =: \frac{i}{\hbar} L_z \quad (\text{II.3})$$

L_z ist die z-Komponente des Drehimpulses. (II.3) ist ein altbekanntes Ergebnis aus der Drehimpulstheorie. Analog dazu ergeben sich die Erzeugenden der Drehung um die x- und y-Achse als die x- und y-Komponente des Drehimpulses.

Mit (II.1) und (II.2) ist uns ein Verfahren in die Hand

gegeben die Erzeugenden von Transformationen zu berechnen. Diese haben folgende Eigenschaften:

(a) Sie bilden einen Vektorraum, denn jede Linearkombination

$$\sum_{\delta} C^{\delta} X_{\delta} ; (C^{\delta} = \text{konst})$$

ist wieder eine infinitesimale Transformation und umgekehrt kann jede infinitesimale Transformation durch eine solche Linearkombination dargestellt werden.

(b) Es kann auf diesen Vektorraum eine antisymmetrische Multiplikation definiert werden, sodass $X_1, \dots, X_r$ eine Algebra bilden:

$$[X_{\mu}, X_{\nu}] = \sum_{\lambda} C_{\mu\nu}^{\lambda} X_{\lambda} \quad (C_{\mu\nu}^{\lambda} = \text{konst})$$

(II.4)

mit $[X_{\mu}, X_{\nu}] = -[X_{\nu}, X_{\mu}]$.

Diese Algebra wird Lie-Algebra genannt.

In der Physik spielen zwei Arten von Multiplikationen eine wesentliche Rolle. In der klassischen Physik ist es die Poissonklammer

$$\{A, B\}_{q,p} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right)$$

wobei q_i und p_i generalisierte Koordinaten und Impulse sind. in der Quantenphysik tritt an Stelle der Poissonklammer der Kommutator $[A, B]$.

Es gibt neben (II.4) noch eine weitere Eigenschaft, die ich hier ebenfalls nicht beweisen möchte (12):

$$[[X_{\alpha}, X_{\beta}], X_{\gamma}] + [[X_{\beta}, X_{\gamma}], X_{\alpha}] + [[X_{\gamma}, X_{\alpha}], X_{\beta}] = 0 \quad (\text{II.5})$$

Sie wird als Jacobi-Identität bezeichnet. Aus (II.4) und (II.5) werden die folgenden Eigenschaften der Konstanten $C_{\mu\nu}^{\lambda}$ abgeleitet:

$$C_{\mu\nu}^{\lambda} = -C_{\nu\mu}^{\lambda} \quad (\text{II.6a})$$

$$\sum_{\delta} (C_{\alpha\beta}^{\delta} C_{\delta\gamma}^{\delta} + C_{\beta\gamma}^{\delta} C_{\delta\alpha}^{\delta} + C_{\gamma\alpha}^{\delta} C_{\delta\beta}^{\delta}) = 0 \quad (\text{II.6b})$$

(II.6a) folgt aus (II.4) und (II.6b) aus (II.5).

Es gibt folgende Aussage:

Bilden die Erzeugenden X_{μ} ($\mu=1, \dots, r$) eine Lie-Algebra, so besitzen die Strukturkonstanten $C_{\mu\nu}^{\lambda}$ die Eigenschaften (II.6a,b), und umgekehrt: Besitzen die Konstanten $C_{\mu\nu}^{\lambda}$ die Eigenschaften (II.6a,b), so bilden die dazugehörigen Erzeugenden eine Lie-Algebra.

Die Kommutationsrelationen der Erzeugenden X_{μ} kann noch auf eine standardisierte Form transformiert werden. Es werden zunächst die Erzeugenden herausgesucht, die paarweise miteinander vertauschen. Diese werden als $H_1, \dots, H_l$ bezeichnet und sie bilden die sogenannte "Cartan-Subalgebra". Ihre Anzahl l heisst Rang der Algebra. Die restlichen Erzeugenden E_{α} können so gewählt werden, dass die Kommutationsrelationen die folgende Form haben:

$$[H_i, H_k] = 0$$

$$[H_i, E_{\alpha}] = n_{\alpha} E_{\alpha} \quad (\text{II.7})$$

$$[E_{\alpha}, E_{\beta}] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} \quad ; \quad \beta \neq -\alpha$$

$$[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = \sum_{i=1}^l r_{\alpha}^i H_i$$

Die Zahlen n_{α} , $N_{\alpha\beta}$ und r_{α}^i sind durch die jeweilige Gruppe charakterisiert und umgekehrt werden, wie bei den $C_{\mu\nu}^{\lambda}$, durch diese Zahlen die Gruppe charakterisiert. Näheres darüber ist in den diversen Lehrbüchern zu finden (12, 13, 14).

Beispiele:

(a) Drehung um eine Achse im zweidimensionalen Raum

Diese Gruppe besitzt nur eine Erzeugende: $I_y = I_z$. Das Beispiel ist trivial, da eine Erzeugende stets mit sich selbst vertauscht. Der Rang der Gruppe ist 1.

(b) Drehung im dreidimensionalen Raum

Die Erzeugenden sind die bekannten Komponenten des Drehimpulses: $I_1 = I_x$, $I_2 = I_y$, $I_3 = I_z$. die Kommutationsrelationen sind

$$[I_i, I_j] = \varepsilon_{ijk} I_k$$

Da die Komponenten nicht miteinander vertauschen, gilt hier nur der triviale Fall, dass die Cartan-Subalgebra nur von einer Erzeugenden gebildet wird, nämlich $I_z = I_3$.

Zum Schluss dieses Abschnittes soll noch gezeigt werden, dass durch das Hintereinanderausführen von sehr vielen infinitesimalen Transformationen endliche erreicht werden:

Die infinitesimalen Transformationen sollen die Form $(1 + \sum a^m X_m / n)$ besitzen. Das n-fache Produkt ist dann durch $(1 + \sum a^m X_m / n)^n$ gegeben. Wird der Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ gebildet, so steht dort gerade die e-Funktion

$$e^{\sum a^m X_m} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n} \sum a^m X_m)^n. \quad (\text{II.8})$$

Die Transformation einer Funktion ist dann durch

$$F(x') = e^{\sum a^m X_m} F(x) \quad (\text{II.9})$$

gegeben.

Beispiel: Für die Drehung um eine feste Achse war die Erzeugende bereits oben berechnet. Die Erzeugende der Trans-

formation ist $X_\varphi = \frac{i}{\hbar} L_z$. Eine endliche Transformation hat somit die folgende Form $e^{\frac{i}{\hbar} L_z} \varphi$.

(3) Was ist eine Darstellung?

Sei $G = \{g\}$ eine Gruppe mit den Elementen g . Findet man eine Abbildung $D: g \rightarrow D(g)$, sodass alle Gruppeneigenschaften erhalten bleiben (d.h. wenn $g_1 \circ g_2 = g_3$ ist, dann muss auch $D(g_1)D(g_2) = D(g_3)$ sein), so bilden alle Elemente $D(g)$ ebenfalls eine Gruppe, die als Darstellung der Gruppe G bezeichnet wird. Wie eine Darstellung konstruiert wird, soll in den nächsten Zeilen gezeigt werden:

Betrachten wir einen n -dimensionalen Vektorraum V mit der Basis $\{|\varphi_i\rangle\}$ und untersuchen die Wirkung der Gruppe $G = g$ auf diesen Raum. Das Ergebnis ist

$$g |\varphi_i\rangle = \sum_k a_{ik}(g) |\varphi_k\rangle \quad (\text{II.10a})$$

mit

$$a_{ik}(g) = \langle \varphi_k | g | \varphi_i \rangle \quad (\text{II.10b})$$

wobei $a_{ik}(g)$ Zahlen sind, die von g abhängen und als Matrixelemente einer Matrix $D(g) = (a_{ik}(g))$ aufgefasst werden können. Es ist leicht zu zeigen, dass die Menge $D(g)$ aller Matrizen wieder eine Gruppe bilden. Einer Multiplikation zweier Gruppenelemente entspricht der Matrixmultiplikation. Dem inversen Element g^{-1} entspricht die inverse Matrix $D^{-1}(g)$ (7, 12, 13).

Je nach Darstellung kann es einen Unterraum h von V_0 ($h \subseteq V_0$) geben, der abgeschlossen unter den Gruppenoperationen ist, d.h. eine beliebige Operation angewendet auf ein Element des Raumes führt auf ein Element desselben Raumes! Wäre dies

der Fall, so genügt es sich auf diesen Unterraum zu beschränken, um die Eigenschaften der Gruppe zu untersuchen. Dies ist garantiert der Fall, wenn alle Matrizen $D(g)$ die folgende Gestalt besitzen oder auf diese zu bringen sind:

$$D(g) = \left(\begin{array}{c|c} D_1(g) & C(g) \\ \hline 0 & D_2(g) \end{array} \right) \begin{matrix} \}^m \\ \}^n \end{matrix} \quad (\text{II.11})$$

Vektoren der Form $(\overbrace{*\dots*}^m, \overbrace{0\dots0}^n)$ werden wieder in Vektoren der gleichen Form überführt. Sie spannen deshalb einen Unterraum auf, der die gewünschten Eigenschaften hat. Wenn es möglich ist alle Matrizen $D(g)$ auf eine solche Form zu überführen, so heisst die Darstellung reduzibel, weil der Raum, auf den G wirkt, auf einen kleineren reduziert werden kann. Wird das Produkt $D(g_1 \circ g_2) = D(g_1)D(g_2)$ gebildet, so bilden $\{D_1(g)\}$ und $\{D_2(g)\}$ ebenfalls eine Darstellung, denn:

$$\begin{aligned} D(g_1)D(g_2) &= \left(\begin{array}{c|c} D_1(g_1) & C(g_1) \\ \hline 0 & D_2(g_1) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} D_1(g_2) & C(g_2) \\ \hline 0 & D_2(g_2) \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{c|c} D_1(g_1)D_1(g_2) & D_1(g_1)C(g_2) + C(g_1)D_2(g_2) \\ \hline 0 & D_2(g_1)D_2(g_2) \end{array} \right) = \quad (\text{II.12}) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} D_1(g_1 \circ g_2) & \tilde{C}(g_1 \circ g_2) \\ \hline 0 & D_2(g_1 \circ g_2) \end{array} \right) = D(g_1 \circ g_2) \end{aligned}$$

$D_1(g)$ und $D_2(g)$ werden als reduzierte Darstellungen bezeichnet. Natürlich können diese Darstellungen weiter reduzibel sein. Ist dies allerdings nicht mehr möglich, d.h. gibt es mindestens ein Element $g \in G$, dessen Darstellungsmatrizen nicht mehr auf die Form (II.11) zu überführen sind, dann wird die Darstellung als irreduzibel bezeichnet.

Eine weitere Vereinfachung tritt auf, wenn eine kompakte Gruppe vorliegt. Wie weiter oben erwähnt wurde, ist der Parameterbereich von kompakten Gruppen kompakt. Bei diesen Darstellungen können die Matrizen $D(g)$ auf die folgende Form reduziert werden (12,13):

$$D(g) = \left(\begin{array}{c|c} D_1(g) & C(g) \\ \hline 0 & D_2(g) \end{array} \right)$$

Beispiel: Drehung um eine feste Achse im 3-dim. Raum

Wie bekannt, können diese Drehungen durch

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

dargestellt werden. Dies entspricht der Wahl, die z-Achse als Drehachse zu wählen. Der Parameterbereich ist beschränkt, denn $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, d.h. die Gruppe ist kompakt. Wie oben zu erkennen ist, besitzt bereits diese Darstellung eine reduzierte Form, denn sowohl

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

als auch "1" erfüllen alle Gruppeneigenchaften, wenn auch "1" eine triviale Darstellung ist.

(4) Klassifikation kontinuierlicher Gruppen (12)

Die kontinuierlichen Gruppen werden nach den Eigenschaften aufgeteilt, wie sie auf den Raum wirken, in dem die Transformationen der Gruppe untersucht werden. Der r-dimensionale Parameterraum mit den Elementen $(a^i) = (a^1, \dots, a^r)$ ist nur einer von solchen Räumen.

Die Räume werden durch die Metrik $g_{\mu\nu}$ charakterisiert. Das Skalarprodukt in diesem Raum ist definiert durch

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (\text{II.13})$$

Die Metrik heisst bilinear, wenn das Skalarprodukt in beiden Argumenten linear ist, d.h.

$$(\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \lambda_1 (\vec{x}_1, \vec{x}_3) + \lambda_2 (\vec{x}_2, \vec{x}_3)$$

und genauso für das zweite Argument. Die Metrik ist unitär-linear, wenn das Skalarprodukt im zweiten Argument linear ist aber für das erste gilt

$$(\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \lambda_1^* (\vec{x}_1, \vec{x}_3) + \lambda_2^* (\vec{x}_2, \vec{x}_3)$$

Die Metrik ist symmetrisch, wenn $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ ist und antisymmetrisch, falls $g_{\mu\nu} = -g_{\nu\mu}$ gilt. Das Volumenelement dieses Raumes ist $dV = \sqrt{\det(g_{\mu\nu})} dx^1 \dots dx^n$. Eine Transformation von dx^i nach $dx'^i = \sum_j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j = \sum_j A^i_j dx^j$ bewirkt, dass das neue Volumenelement dV die folgende Gestalt annimmt:

$$dV' = \det(A^i_j) \sqrt{\det(g_{\mu\nu})} dx'^1 \dots dx'^n = \sqrt{\det(g'_{\mu\nu})} dx'^1 \dots dx'^n \quad (\text{II.14})$$

$\det(A^i_j)$ ist die Jacobideterminante. Die Einteilung der Gruppen erfolgt folgendermassen:

- (A) volumenerhaltende Gruppen
- (B) metrikerhaltende Gruppen
- (C) Gruppen mit beiden Eigenschaften
- (D) Gruppen, für die die Eigenschaften (A)-(C) nur zum Teil zutreffen.

Im letzten Abschnitt zeige ich, dass es genügt die Matrizendarstellung einer Gruppe zu untersuchen, da sie äquivalent zur Gruppe selbst ist. Die Determinante $\det(D(g))$ muss $\neq 0$ sein, da sonst kein inverses Element existieren würde. Die allgemeinste Gruppe, die aus invertierbaren Matrizen besteht, ist die Gruppe GL(n). n gibt die Anzahl der Zeilen und Spalten an und GL steht für 'General Linear'. Alle anderen Gruppen müssen somit Untergruppen von

$GL(n)$ sein. Mit Hilfe von Matrizendarstellungen ist die folgende Aufteilung der Gruppen in die Eigenschaften (A)-(D) verständlich:

(A) volumenerhaltene Gruppen

Dies sind solche, die bei einer Transformation ein beliebiges Volumenelement invariant lassen, d.h. (siehe Gleichung (II.14))

$$\det(A^i_j) \sqrt{\det(g_{\mu\nu})} = \sqrt{\det(g_{\mu'\nu'})} \quad (\text{II.15})$$

Die Determinante dieser Matrizen muss gleich +1 sein, da sonst das Volumenelement mit $\det(A^i_j) \neq 1$ multipliziert werden würde.

(B) metrikerhaltende Gruppen

Sei A ein Element aus der Matrizendarstellung der Gruppe und $(g_{\mu\nu}) = g$ die Metrik des Raumes, auf den die Gruppe wirkt. Metrikerhaltend heisst, dass

$$A^{-1} g A = g \quad (\text{II.16})$$

gilt. Je nachdem, welcher Art diese Metrik ist, werden die Gruppen mit einem Namen versehen:

- (i) Gruppen, die eine bilineare symmetrische Metrik erhalten, heissen orthogonal (O).
- (ii) Gruppen, die eine unitärlineare Metrik erhalten, heissen unitär (U).
- (iii) Gruppen, die eine bilineare antisymmetrische Metrik erhalten, heissen symplektisch (Sp).

(C) Gruppen, die beide Eigenschaften haben

Für sie gelten die gleichen Definitionen, wie in (A) und (B). Sie werden als SO , SU oder SSp bezeichnet, je nachdem, welche Metrik sie erhalten.

(D) Es gibt nur eine Gruppe, die Anteile mit den Eigenschaften (A)-(C) hat, aber nicht die ganze Gruppe. Es ist die bereits oben erwähnte GL-Gruppe.

Beispiel: Die Gruppe der Drehungen um eine Achse. Die Gruppenelemente haben, wie schon mehrmals erwähnt, die Form

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = (A'_{ij})$$

Die Determinante dieser Matrix ist +1, d.h. das Volumenelement $dV = dx dy$ geht in das Volumenelement $dV' = dx' dy'$ über. Ausserdem erhält sie die Metrik $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, denn

$$A^{-1} g A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = g$$

Diese Metrik ist symmetrisch ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) und wegen $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \sum_{\mu} x_1^{\mu} x_2^{\mu}$, ist sie bilinear. Diese Gruppe erfüllt also die Eigenschaften (A) und (B.i), d.h. es handelt sich um eine SO-Gruppe, und da die Drehung in einem zweidimensionalen Raum den Rang 1 hat, wird diese Gruppe mit $SO(2)$ bezeichnet.

Tabelle II.1

Gruppe	Parameter	Rang
$SU(l+1)$	$l^2 + 2l$	l
$SO(2l+1)$	$2l^2 + l$	l
$Sp(2l)$	$2l^2 + l$	l
$SO(2l)$	$2l^2 - 1$	l

(5) Invariantenproblem

Ein Operator $'C'$, der mit allen Elementen g der Gruppe G vertauscht,

$$[g, C] = 0, \text{ für alle } g \in G \quad (\text{II.17a})$$

wird Casimiroperator genannt. Die Relation (II.17a) gilt selbstverständlich auch für jede Darstellung der Gruppe:

$$[D(g), D(C)] = 0 \quad (\text{II.17b})$$

Ist insbesondere D eine irreduzible Darstellung D_{IR} (Irreducible Representation), so gilt das "'Schur'sche Lemma'" (12,13), das hier nicht bewiesen werden soll. Das Schur'sche Lemma besagt, dass dann $D_{IR}(C)$ das Vielfache der Einheitsmatrix ist:

$$D_{IR}(C) = \lambda_{IR} E_{IR}$$

Im allgemeinen gibt es mehrere Casimiroperatoren C' . Die Zahlen λ'_{IR} kennzeichnen die irreduziblen Darstellungen. Es besteht ein einfaches Verfahren um mindestens einen Casimiroperator der Gruppe zu bestimmen: Wenn $g_{\mu\nu}$ die Metrik des Parameterraumes ist, dann ist der sogenannte quadratische Casimiroperator über

$$C_2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu \quad (\text{II.18})$$

zu bestimmen. Die anderen Casimiroperatoren sind von höherer Ordnung in den Erzeugenden X^μ (14,15).

$$C_n = \sum_{\mu_1 \dots \mu_n} d_{\mu_1 \dots \mu_n} X^{\mu_1} \dots X^{\mu_n} \quad (\text{II.19})$$

wobei $d_{\mu_1 \dots \mu_n}$ eine wohldefinierte Funktion der Metrik $g_{\mu\nu}$ ist. Die Casimiroperatoren müssen nicht unbedingt so wie in (II.18) und (II.19) aussehen, sie können auch beliebige Linearkombinationen davon sein. Es gilt aber:

Ist der Rang der Gruppe gleich l , so existieren genau l linear unabhängige Casimiroperatoren.

Beispiel: Die Gruppe $O(3)$ beschreibt Drehungen im dreidimensionalen Raum. Die Erzeugenden sind I_x, I_y, I_z . Die Metrik im Parameterraum ist gleich der Metrik im dreidimensionalen euklidischen Raum, nämlich $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Der quadratische Casimiroperator ist dann

$$C_2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} I_\mu I_\nu = I_x^2 + I_y^2 + I_z^2 = I^2$$

Dies ist gerade der Drehimpulsoperator und da die Ordnung von $O(3)$ gemäss Tabelle (II.1) gleich 1 ist, ist dies auch der einzige. Die Eigenwerte des Drehimpulsoperators sind $L(L+1) = \lambda_L$. Die irreduziblen Darstellungen werden somit durch die Quantenzahlen L charakterisiert. In einem irreduziblen Raum zum Drehimpuls L hat der Casimiroperator gerade die Form

$$L(L+1) E_{K_L},$$

wobei $K_L = (2L+1)$ die Dimension des Raumes zum Drehimpuls L angibt.

Mit diesem Verfahren können die Basisfunktionen (-vektoren) in einem irreduziblen Raum durch 'Quantenzahlen' λ_{IR}^i gekennzeichnet werden. Die Klassifizierung wäre eindeutig, wenn zu einem Satz von Quantenzahlen λ_{IR}^i ($i=1, \dots$) jeweils nur ein Basisvektor existieren würde. Im allgemeinen ist dies nicht der Fall. Man muss deshalb ein Verfahren finden, das eine vollständige Klassifizierung erlaubt.

Beispiel: Die Drehimpulsvektoren $|L\rangle$ sind z.B. auch nicht eindeutig klassifiziert, denn die Dimension jedes Raumes zum Drehimpuls L ist $(2L+1)$, d.h. es gibt $(2L+1)$ Vektoren mit der gleichen Quantenzahl L . Das Verfahren, welches eine weitere Klassifizierung erlaubt ist die Gruppenreduzierung.

(6) Gruppenreduzierung

Betrachten wir eine Gruppe G mit den Casimiroperatoren C_G^i ($i=1, \dots, l_G$), den irreduziblen Darstellungen $D_{IR}(G)$ und den dazugehörigen Quantenzahlen λ_{IR}^i ($i=1, \dots, l_G$). l_G ist der Rang der Gruppe. G' sei eine Untergruppe, die ebenfalls Casimiroperatoren $C_{G'}^j$ ($j=1, \dots, l_{G'}$) besitzt. Die irreduzible Darstellung $D_{IR}(G)$ kann nun bezüglich der Gruppe G' reduzibel werden:

$$G(\{g_1\}, \{g_2\}) \supset G'(\{g_2\})$$

$$D_{IR}: \quad (\ast)_{IR} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc} D_1(g_2) & 0 \\ 0 & D_2(g_2) \end{array} \right) \begin{array}{l} \} H_1 \\ \} H_2 \end{array} \quad (II.20)$$

Dies ist möglich, falls entsprechende Gruppenelemente $\{g_1\}$ wegfallen, die die Räume H_1 und H_2 verbinden. Die irreduziblen Darstellungen von G' werden durch die neuen Quantenzahlen $\lambda_{IR_{G'}}^j$ (Eigenwerte der Casimiroperatoren $C_{G'}^j$) charakterisiert. Die Basisvektoren werden somit jetzt durch

$$|\lambda_{IR_G}^i, \lambda_{IR_{G'}}^j\rangle \quad (i=1, \dots, l_G; j=1, \dots, l_{G'})$$

charakterisiert. Ist die Klassifizierung immer noch nicht eindeutig, so muss eine Untergruppe von G' genommen werden, usw..

Beispiel: Dieses Verfahren soll am Beispiel der Drehimpulsgruppe $O(3)$ verdeutlicht werden (siehe Tabelle II.2). Der Rang von $O(3)$ ist 1. Der somit einzige Casimiroperator ist der Drehimpulsoperator L^2 mit den Quantenzahlen L . Die Basisvektoren werden durch die Drehimpulsquantenzahlen $\lambda_{IR_{O(3)}} = L$ charakterisiert:

$$|L\rangle$$

Da die Dimension dieser irreduziblen Darstellung gleich $(2L+1)$ ist, ist die Klassifizierung nicht vollständig. Die Untergruppe, die weiterhilft, ist $O(2)$. Sie beschreibt, wie schon mehrmals erwähnt, die Drehung um eine Achse. Ihr Rang

ist 1 und da L_z die einzige Erzeugende ist, ist sie auch der einzige Casimiroperator der Gruppe $O(2)$. Die Eigenwerte sind die magnetischen Quantenzahlen M . Die Basisvektoren werden nun durch

$$|L, M\rangle$$

charakterisiert und wie bekannt ist, ist diese Klassifizierung eindeutig.

Tabelle II.2

Gruppe:	$O(3)$	$\supset$	$O(2)$
Casimiroperator:	$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$		L_z
Quantenzahlen:	L		M
Elemente:	$e^{\frac{i}{\hbar}(\varphi_x L_x + \varphi_y L_y + \varphi_z L_z)}$		$e^{\frac{i}{\hbar}\varphi_z L_z}$
Basisvektoren:	$ L, M\rangle$		

Im folgenden soll die Symmetriegruppe des Basishamiltonoperators (5-dim. harmonischer Oszillator) herausgefunden werden. Anschliessend sollen die dazugehörigen Basisvektoren (-funktionen) klassifiziert werden. Im Voraus sei erwähnt, dass dabei die Gruppe $O(5)$ und $O(3)$ eine sehr wichtige Rolle einnehmen. Deshalb werden insbesondere diese Gruppen näher betrachtet und die grosse Gemeinsamkeit zwischen ihnen aufgezeigt.

(B) Die Basis des 5-dim. harmonischen Oszillators

(1) Die Symmetriegruppe der Basis

Der 5-dimensionale harmonische Oszillator hat die Form

$$H_5 = \frac{1}{2} B_5 \sum_m (-1)^m \pi_{2m} \pi_{2-m} + \frac{C_2}{2} \sum_m (-1)^m \alpha_{2m} \alpha_{2-m} \quad (\text{II.21})$$

Er kann auch durch Phononen-Erzeugungs- und -Vernichtungsoperatoren (β_{2m}^+ und β_{2m}) dargestellt werden. Die Relation zwischen ihnen und α_{2m} bzw. π_{2m} ist

$$\alpha_{2m} = \left(\frac{\hbar \omega_2}{2 C_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\beta_{2m}^+ + (-1)^m \beta_{2-m}^+ \right) \quad (\text{II.22})$$

$$\pi_{2m} = \left(\frac{\hbar C_2}{2 \omega_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left((-1)^m \beta_{2-m}^+ - \beta_{2m} \right)$$

mit $\omega_2 = \sqrt{\frac{B_2}{C_2}}$.

Einsetzen von (II.22) in (II.21) ergibt den bekannten Ausdruck

$$H_5 = \hbar \omega_2 \left(\hat{N} + \frac{5}{2} \right) \quad (\text{II.23})$$

wobei $N = \sum_m \beta_{2m}^+ \beta_{2m}$ der Teilchenzahloperator ist.

Suche nach der maximalen Symmetriegruppe

Die maximale Symmetriegruppe ist diejenige, die alle Transformationen enthält, unter denen der Hamiltonoperator H invariant bleibt, oder anders ausgedrückt alle Transformationen U , die mit dem Hamiltonoperator vertauschen

$$[U, H_5] = 0 \quad (\text{II.24})$$

Da in der Quantenmechanik der Erwartungswert $|\langle \psi | \psi \rangle|^2$ eines Zustandes $|\psi\rangle$ unter einer Transformation $|\psi\rangle = U|\psi\rangle$ erhalten bleiben muss, müssen die Transformationen unitär sein:

$$|\langle \psi' | \psi' \rangle|^2 = |\langle \psi | U^\dagger U | \psi \rangle|^2 = |\langle \psi | \psi \rangle|^2$$

$$\text{d.h. } U^\dagger U = 1$$

$$\text{bzw. } U U^\dagger = 1$$

(II.24)

Dies ist gerade die Bedingung für Unitarität. Diese Transformation ist so geartet, dass die Bosonenoperatoren sich wie folgt transformieren:

$$\begin{aligned}\beta_m &= \sum_{\nu} U_{m\nu} b_{\nu} & (\beta_m &\equiv \beta_{2m}, \beta_m^+ \equiv \beta_{2m}^+) \\ \beta_m^+ &= \sum_{\nu} U_{\nu m}^* b_{\nu}^+ \quad , m = -2, -1, 0, +1, +2\end{aligned}\quad (\text{II.25})$$

Dies ist gerade eine unitäre Transformation in 5 Dimensionen. Im Anhang (A) wird gezeigt, dass dies die einzige Möglichkeit ist. Dies bedeutet, dass die maximale Symmetriegruppe die unitären Transformationen in 5 Dimensionen ist, oder anders ausgedrückt die Gruppe $U(5)$.

(2) Klassifikation der Zustände

Wie in (II.20) gezeigt wurde, werden die Zustände der maximalen Symmetriegruppe $U(5)$ durch die Eigenwerte der Casimiroperatoren charakterisiert. Ein Casimiroperator der Gruppe $U(5)$ ist der Teilchenzahloperator

$$\hat{N} = \sum_m \beta_m^+ \beta_m \quad (\text{II.26})$$

mit den Eigenwerten ν , der Anzahl der Phononen in einem Zustand. Damit ist allerdings keine vollständige Klassifizierung erreicht: Ein 2-Bosonenzustand kann z.B. zum Drehimpuls $L=0, 2$ und 4 koppeln! Gemäss Tabelle II.1 besitzt die Gruppe $U(5)$ den Rang 4, also müssen 4 Casimiroperatoren zur Verfügung stehen. Allerdings stellt es sich heraus, dass die anderen 3 Casimiroperatoren proportional zum Teilchenzahloperator sind. Dies ist der Fall, da hier nur symmetrische Darstellungen (Zustände) betrachtet werden (15,16). Um eine vollständige Klassifizierung zu erhalten, muss eine Gruppenreduzierung vorgenommen werden. Es gibt einige Möglich-

keiten, allerdings erwähne ich hier nur eine Gruppenkette, die für dieses Problem am geeignetsten ist:

$$U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2) \quad (II.27)$$

Der Grund dafür ist, dass darin die physikalische Drehimpulsgruppe enthalten ist. Alle anderen Gruppenketten enthalten nicht $O(3) \supset (5)$. In Tabelle (II.3) ist die Gruppenkette mit den dazugehörigen Casimiroperatoren und Eigenwerten tabelliert. Mit diesen Quantenzahlen werden die Zustände des Basishamiltonoperators charakterisiert.

Es sind dies die Quantenzahlen:

ν = Phononenzahl

λ = Seniorität, die die Anzahl der nicht paarweise zu Null gekoppelten Phononen angibt

L = Drehimpuls

M = magnetische Quantenzahl

Diese Quantenzahlen reichen allerdings noch nicht aus, um die Zustände vollständig zu klassifizieren, denn ab Drehimpuls 6 gibt es zu gleichen ν , λ , L und M teilweise zwei Zustände (5). Hier versagt die Methode der Gruppenreduzierung. In einem späteren Kapitel wird die Konstruktion der Basiswellenfunktionen erklärt. Dort wird eine zusätzliche Quantenzahl μ eingeführt, die kein Eigenwert zu einem Casimiroperator ist, aber doch noch eine physikalische Bedeutung hat: Wenn man die Kopplung von jeweils 3 Phononen zum Drehimpuls 0 betrachtet, so gibt μ die maximale Anzahl dieser Kopplungen im Zustand an. μ ist also so etwas wie eine "verallgemeinerte Seniorität".

Wie im Falle der Gruppe $U(5)$ besitzt die Gruppe $O(5)$ in symmetrischen Darstellungen nur einen relevanten Casimir-

operator und wie aus Tabelle II.1 zu ersehen ist, besitzen die Gruppe $O(3)$ und $O(2)$ sowieso nur einen Casimiroperator. Die Konstruktion der Casimiroperatoren der orthogonalen Gruppen wird im nächsten Abschnitt erläutert und die grosse Ähnlichkeit zwischen ihnen wird aufgezeigt.

Tabelle II.3

	$U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2)$
Casimiroperator:	$\hat{N}$ $\hat{A}^2$ $\hat{L}^2$ $\hat{L}_z$
Quantenzahlen:	ν λ L M

Eigenzustand: $|\nu \lambda M L M\rangle$

(3) Die Gruppen $O(3)$ und $O(5)$

Zunächst wird die Gruppe $O(3)$ nochmals behandelt und die Erkenntnisse anschliessend auf die Gruppe $O(5)$ übertragen. Die Gruppe $O(2)$ wird hier nicht betrachtet, da sie nur eine Erzeugende L_z (z-Komponente des Drehimpulsoperators) besitzt und somit trivial ist. Die Ergebnisse bezüglich $O(3)$ und $O(5)$ sind in Tabelle (II.4) zusammengefasst.

$O(3)$ beschreibt Drehungen im 3-dimensionalen Raum. Die Erzeugenden dieser Gruppe sind gerade die Komponenten des Drehimpulses: ($\hbar=1$)

$$\begin{aligned}
 L_x = L_{23} &= \frac{1}{i} \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{i} (\vec{r} \times \vec{\nabla})_1 \\
 L_y = L_{31} &= \frac{1}{i} \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{i} (\vec{r} \times \vec{\nabla})_2 \\
 L_z = L_{12} &= \frac{1}{i} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{i} (\vec{r} \times \vec{\nabla})_3
 \end{aligned}
 \tag{II.28a}$$

mit $x_1=x$, $x_2=y$ und $x_3=z$. Die vektorielle Schreibweise ist

universell und statt den kartesischen Komponenten (x_1, x_2, x_3) können auch sphärische Komponenten (x_{-1}, x_0, x_1) genommen werden. Die sphärischen Komponenten sind durch

$$\begin{aligned} x_{-1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (x - iy) \\ x_0 &= z \\ x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (x + iy) \end{aligned} \quad (\text{II.28b})$$

definiert und sind die Komponenten des Vektors $\vec{r}$ mit Drehimpuls 1, denn L auf r angewendet ist gerade $1(1+1)r$ (siehe Anhang (B)).

$$L^2 \vec{r} = 2 \vec{r} \quad (\text{II.29})$$

Der Drehimpulsoperator L^2 ist gerade $\vec{L} \cdot \vec{L}$, mit $\vec{L} = \frac{1}{i} (\vec{r} \times \vec{\nabla})$. Eine einfache Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} L^2 &= \vec{L} \cdot \vec{L} = \left(\frac{1}{i}\right)^2 (\vec{r} \times \vec{\nabla}) \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla}) = \\ &= (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) + 1 - r^2 \vec{\nabla}^2 \end{aligned} \quad (\text{II.30a})$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) &= \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \hat{N} \\ r^2 &= \sum_{i=1}^3 x_i x_i \equiv (\vec{r} \cdot \vec{r}) \\ \text{und } \vec{\nabla}^2 &= \sum_{i=1}^3 (-1) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \equiv (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \end{aligned} \quad (\text{II.30b})$$

hat L^2 die entgültige Form

$$L^2 = \hat{N}(\hat{N}+1) - (\vec{r} \cdot \vec{r})(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \quad (\text{II.30c})$$

Die Eigenwerte von L sind $L(L+1)$.

In der Gruppe $O(5)$ ist es ähnlich. Wir betrachten im kollektiven Modell die Transformationen der α_{2m} ($m=-2, \dots, +2$). Diese spannen einen 5-dimensionalen Raum auf und die Transformation repräsentieren Drehungen in diesem Raum. α_{2m} sind die sphärischen Komponenten eines "Vektors" $\vec{\alpha}_2$ mit Dreh-

impuls 2. Die Erzeugenden der Gruppe sind:

$$\Lambda_{mm'} = \alpha_{2m} \frac{\partial}{\partial \alpha_{2m'}} - \alpha_{2m'} \frac{\partial}{\partial \alpha_{2m}} \quad (\text{II.31})$$

Mit der Beziehung $\alpha_{2m}^{2m} = \alpha_{2m}^{*m} = (-1)^m \alpha_{2-m}$ und $\pi_{2m}^{2m} = \pi_{2m}^{*m} = -(-1)^m \pi_{2-m}$, wobei $\pi_{2m} = -i \frac{\partial}{\partial \alpha_{2m}}$, erhalten wir, analog wie in der Gruppe $O(3)$, als quadratischen Casimiroperator der Gruppe $O(5)$

$$\hat{\Lambda}^2 = \hat{N}(\hat{N}+3) - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha})(\vec{\pi} \cdot \vec{\pi}) \quad (\text{II.32a})$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \sum_{m=-2}^{+2} \alpha_{2m} \pi_{2m}^{2m} \\ (\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}) &= \sum_{m=-2}^{+2} \alpha_{2m} \alpha_{2m}^{2m} \\ (\vec{\pi} \cdot \vec{\pi}) &= \sum_{m=-2}^{+2} \pi_{2m} \pi_{2m}^{2m} = \sum_{m=-2}^{+2} (-1)^m \frac{\partial^2}{\partial \alpha_{2m} \partial \alpha_{2-m}} \end{aligned} \quad (\text{II.32b})$$

Die Eigenwerte von $\hat{\Lambda}^2$ sind $\lambda(\lambda+3)$. Werden die Ergebnisse von $O(3)$ und $O(5)$ miteinander verglichen (siehe Tabelle II.4), dann liegt die Annahme sehr nahe die Gruppe $O(5)$ als eine "Art Drehimpulsgruppe" zu bezeichnen, mit dem Drehimpuls . Tatsächlich ist ja die Gruppenstruktur sehr ähnlich, denn beide Gruppen beschreiben Drehungen, allerdings in verschiedenen dimensional Räumen! Das Ergebnis kann auch auf beliebige orthogonale Gruppen $O(2\ell+1)$ ($\ell=1,2,3,\dots$) erweitert werden. Der quadratische Casimiroperator ist durch

$$C_2^\ell = \hat{N}(\hat{N}+(2\ell-1)) - (\vec{\alpha}_\ell \cdot \vec{\alpha}_\ell)(\vec{\pi}_\ell \cdot \vec{\pi}_\ell) \quad (\text{II.33a})$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \alpha_{\ell m} \pi_{\ell m}^{\ell m} \\ (\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}) &= \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \alpha_{\ell m} \alpha_{\ell m}^{\ell m} \\ (\vec{\pi} \cdot \vec{\pi}) &= \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \pi_{\ell m} \pi_{\ell m}^{\ell m} \end{aligned} \quad (\text{II.33b})$$

gegeben. Die Eigenwerte sind $\lambda_\ell(\lambda_\ell + (2\ell - 1))$. In (II.33a,b) kann auch statt $\alpha_{\ell m}$ und $\pi_{\ell m}$ jeder andere Tensor zum Drehimpuls ℓ eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}\alpha_{\ell m} &\longrightarrow \beta_{\ell m}^+ \\ \pi_{\ell m} &\longrightarrow \beta_{\ell m} = \frac{\partial}{\partial \beta_{\ell m}^+}\end{aligned}\tag{II.34}$$

d.h.

$$\hat{A}^2 = \hat{N}(\hat{N} + 3) - (\beta^+ \cdot \beta^+)(\beta \cdot \beta)$$

Tabelle II.4

$O(5)$	$O(3)$
$\hat{\Lambda}^2$	$\hat{L}^2$
$\lambda(\lambda+3)$	$L(L+1)$
$\Lambda_m^{m'} = \beta_m^+ \beta^{m'} - \beta^{+m'} \beta_m$ $= \beta_m^+ \frac{\partial}{\partial \beta_{m'}^+} - \beta^{+m'} \frac{\partial}{\partial \beta_m}$	$L_{ij} = \frac{1}{i} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$
$\hat{\Lambda}^2 = \sum_{mm'} \Lambda_m^{m'} \Lambda_{m'}^m =$ $= \hat{N}(\hat{N}+3) - (\beta^+ \cdot \beta)(\beta \cdot \beta)$	$\hat{L}^2 = \left(\frac{1}{i} \right)^2 (\vec{r} \times \vec{\nabla}) \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla}) =$ $= \hat{N}(\hat{N}+1) - (\vec{r} \cdot \vec{r})(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})$
$\hat{N} = \sum_{m=-2}^{+2} \beta_m^+ \frac{\partial}{\partial \beta_m^+}$	$\hat{N} = \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$
$(\beta^+ \cdot \beta) = \sum_{m=-2}^{+2} \beta_m^+ \beta^{+m}$	$(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \sum_{i=1}^3 x_i x_i$
$(\beta \cdot \beta) = \sum_{m=-2}^{+2} \beta_m \beta^m$	$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$

(4) Einschub:

Konstruktion eines Hamiltonoperators
aus gruppentheoretischer Sicht

Wir fanden heraus, dass die maximale Symmetriegruppe des 5-dim. harmonischen Oszillators $U(5)$ ist. Die Gruppenkette, bezüglich der die Wellenfunktionen klassifiziert werden, ist

$$U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2) \quad (\text{II.35})$$

mit den Casimiroperatoren $\hat{N}, \hat{A}^2, \hat{L}^2, \hat{L}_z$ und den dazugehörigen Quantenzahlen ν, λ, L, M . Die angegebenen Casimiroperatoren sind alle möglichen, die in der Gruppenkette (II.35) konstruiert werden können.

Wie muss ein Hamiltonoperator aussehen, damit er noch drehimpulsinvariant ist und er als Grenzfall noch den harmonischen Oszillator enthält? Die Antwort ist sehr einfach, denn der Hamiltonoperator muss mit allen Erzeugenden der Gruppe $O(3)$ vertauschen, damit der Drehimpuls erhalten ist. Er muss also ein Casimiroperator der Gruppe $O(3)$ sein, d.h. er muss aus $\hat{L}^2$ und anderen Casimiroperatoren von Gruppen, die $O(3)$ enthalten, aufgebaut sein. Da der Grenzfall des harmonischen Oszillators enthalten sein soll, muss der Casimiroperator der Gruppe $U(5)$ (d.h. $\hat{N}$) in $\hat{H}$ enthalten sein. Die oben genannte Gruppenkette enthält beide Gruppen. $\hat{H}$ muss somit aus den Casimiroperatoren $\hat{N}, \hat{A}^2$ und $\hat{L}^2$ aufgebaut sein:

$$\hat{H} = \hat{H}(\hat{N}, \hat{A}^2, \hat{L}^2) \quad (\text{II.36})$$

Ein einfacher Ansatz ist:

$$\hat{H} = c_\nu \hat{N} + c_\lambda \hat{A}^2 + c_L \hat{L}^2 \quad (\text{II.37})$$

Der Vorteil davon ist, dass der Eigenwert analytisch angegeben werden kann:

$$E_{\nu\lambda L} = c_{\nu}\nu + c_{\lambda}\lambda(\lambda+3) + c_L L(L+1) \quad (\text{II.38})$$

und dass die Wellenfunktionen für alle $c_{\lambda}, c_L \neq 0$ die gleichen sind wie bei $c_{\lambda}, c_L = 0$ (harmonischer Oszillator)! Was ist die Bedeutung der einzelnen Terme?

(i) $c_{\nu} \neq 0, c_{\lambda} = c_L = 0$

In diesem Fall haben wir gerade, bis auf eine Konstante, den harmonischen Oszillator $c_{\nu}(\hat{N} + \frac{5}{2})$, mit $c_{\nu} = \hbar\omega$.

(ii) $c_{\nu} \neq 0, c_{\lambda} \neq 0, c_L = 0$

Das Einschalten des $\hat{\Lambda}^2$ -Termes entspricht dem Einführen eines γ -instabilen Potentials mit einem deformierten Grundzustand bei $\beta \neq 0$. Wie bei γ -instabilen Kernen spalten die Zustände mit gleicher Phononenzahl aber verschiedener Seniorität auf, die bei $c_{\lambda} = 0$ entartet sind. Zustände gleicher Phononenzahl als auch Seniorität bleiben nach wie vor entartet!

(iii) $c_{\nu} \neq 0, c_{\lambda} \neq 0, c_L \neq 0$

Beim Einschalten des $\hat{L}^2$ -Termes schliesslich wird die γ -Instabilität aufgehoben. Anschaulich gesprochen bedeutet dies, dass ein Minimum bei $(\beta \neq 0, \gamma = \text{oder} \neq 0)$ erzeugt wird. In einem späteren Kapitel wird dieses einfache Modell mit anderen verglichen und gezeigt, dass die Energiespektren ganz gut reproduziert werden können. Allerdings hat dieses Modell einen grossen Nachteil: Für gleiches c_{ν} aber verschiedenen c_{λ}, c_L liegt dieselbe Wellenfunktion vor. Dieser Nachteil macht sich bei den EE2-Werten bemerkbar, die sich nicht (!) ändern, obwohl das Energiespektrum ganz anders aussieht. Wenn

$$\hat{Q}_{2m} = 8_0 R_0^5 \left(\alpha_{2m} - \frac{10}{\sqrt{20\pi}} [\alpha^{(2)}_x \alpha^{(2)}_y]^{(2)}_m \right) \quad (\text{II.39})$$

der Quadrupoloperator ist und beachtet wird, dass α_{2m} die Auswahlregeln (siehe Tabelle II.8)

$$\Delta m = 0$$

$$\Delta \lambda = \pm 1$$

$$(\text{II.40a})$$

und $[\alpha_x^{[2]} \alpha^{[2]}]_m^{[2]}$ die Auswahlregeln

$$\Delta \nu = \pm 2, 0$$

$$\Delta \lambda = \pm 2, 0$$

(II.40b)

besitzt, dann gelten für die BE2-Werte die Auswahlregeln

$$\Delta \nu = \pm 2, \pm 1, 0$$

(II.40c)

$$\text{und } \Delta \lambda = \pm 2, \pm 1, 0$$

Zwei Banden mit $\Delta \nu > 2$ können somit nicht miteinander wechselwirken. Ähnliche Auswahlregeln gelten auch für das Rotations-Vibrations-Modell (RVM), nur für andere Quantenzahlen, allerdings verändern sich die Wellenfunktionen, wenn die Modellparameter verändert werden.

In diesem Modell bleiben die BE2-Werte dieselben, wie beim harmonischen Oszillator (!). An diesem Sachverhalt ändert sich auch nichts, wenn Potenzen oder beliebige Funktionen von $\hat{N}, \hat{A}^2$ und $\hat{L}^2$ vorliegen. Die Eigenwerte sind dann:

$$H = f(\hat{N}, \hat{A}^2, \hat{L}^2) \longrightarrow E = f(\nu, \lambda(\lambda+3), L(L+1)) \quad (\text{II.41})$$

Der Grund für all dies ist, dass man sich innerhalb der oben angegebenen Gruppenkette befindet!

Dieses einfache Modell soll auch in Kapitel (IV) aufzeigen, dass es sehr gefährlich ist ein Modell nur nach den Energiespektren im Niederdrehimpulsbereich mit nur wenigen Banden zu beurteilen!

(5) Konstruktion der Eigenfunktionen

(a) Radialer Anteil

In der (β, γ) -Darstellung (siehe Kapitel (I)) hat der harmonische Oszillator die Form

$$H_5 = -\frac{\hbar^2}{2B_2} \left(\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta^2} \hat{A}^2 \right) + \frac{C_2}{2} \beta^2 \quad (\text{II.42a})$$

$\hat{A}^2$ ist der Senioritätsoperator, mit

$$\hat{A}^2 = -\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \sum_{k=1}^3 I_k^{-1} L_k' \quad (\text{II.42b})$$

L_k' sind die Komponenten des Drehimpulses im Hauptachsensystem und $I_k = 4B_2 \sin(\gamma - \frac{2\pi}{3}k)$, wobei $\beta^2 I_k$ ($k=1,2,3$) die Trägheitsmomente bezüglich der einzelnen Hauptträgheitsachsen sind. Die Eigenfunktionen $|\nu\lambda\mu LM\rangle$ von H_5 haben gute Seniorität, d.h.

$$\hat{A}^2 |\nu\lambda\mu LM\rangle = \lambda(\lambda+3) |\nu\lambda\mu LM\rangle \quad (\text{II.43})$$

sodass die Schrödingergleichung sich auf das Problem

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\hbar^2}{2B_2} \left(\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\lambda(\lambda+3)}{\beta^2} \right) + \frac{C_2}{2} \beta^2 \right] |\nu\lambda\mu LM\rangle = \\ = \hbar\omega_2 \left(\nu + \frac{5}{2} \right) |\nu\lambda\mu LM\rangle \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

mit $\omega_2 = \sqrt{\frac{C_2}{B_2}}$

reduziert. Da dieser Ausdruck nicht mehr von (γ, ϑ_i) abhängt, kann die Wellenfunktion separiert werden:

$$|\nu\lambda\mu LM\rangle = F_n^\lambda(\beta) \psi_{\lambda LM}^\mu(\gamma, \vartheta_i)$$

mit $n = \frac{(\nu - \lambda)}{2}$ (II.45)

Die daraus resultierende Differentialgleichung für $F_n^\lambda(\beta)$ ist eine hypergeometrische, deren Lösung bekannt ist:

$$F_n^\lambda(\beta) = \left[\frac{2(n!)}{\Gamma(n+\lambda+\frac{5}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c_2}{\hbar \omega_2} \right)^{\frac{5}{4} + \frac{\lambda}{2}} \beta^\lambda \left[L_n^{\lambda+\frac{3}{2}} \left(\left(\frac{c_2}{\hbar \omega_2} \right) \beta^2 \right) \right] e^{-\frac{1}{2} \frac{c_2}{\hbar \omega_2} \beta^2} \quad (\text{II.46})$$

$L_n^{\lambda+\frac{3}{2}}$ sind die bekannten Laguerrepolynome. Das Problem besteht nun darin die Differentialgleichung für $\hat{\Lambda}^2$ zu lösen:

$$\hat{\Lambda}^2 \varphi_{\lambda L M}^\mu(\gamma, \psi_i) = \lambda(\lambda+3) \varphi_{\lambda L M}^\mu(\gamma, \psi_i) \quad (\text{II.47})$$

Der Separationsansatz

$$\sum_K \phi_K^{\lambda \mu L}(\gamma) [D_{MK}^{L*}(\psi_i) + (-1)^L D_{M-K}^{L*}(\psi_i)] \quad (\text{II.48})$$

trennt die γ - und (ψ_i) -Abhängigkeit, sodass nur noch $\phi_K^{\lambda \mu L}(\gamma)$ zu bestimmen ist. Der Ansatz (II.48) wurde bereits so gewählt, dass die Wellenfunktionen bezüglich der Operatoren T_1 und T_2 (siehe (I.10)) symmetrisiert wurde. Die gesamte Wellenfunktion hat somit die Form

$$|\nu \lambda, M L M\rangle = F_n^\lambda(\beta) \sum_K \phi_K^{\lambda \mu L}(\gamma) [D_{MK}^{L*}(\psi_i) + (-1)^L D_{M-K}^{L*}(\psi_i)] \quad (\text{II.49})$$

mit $n = \frac{1}{2}(\nu - \lambda)$; $K = \text{gerade}$

Die Schwierigkeiten fangen jetzt bei der Bestimmung von $\phi_K^{\lambda \mu L}(\gamma)$ an: Die resultierende Differentialgleichung für $\phi_K^{\lambda \mu L}(\gamma)$ ist nur in speziellen Fällen einfach lösbar und zwar für $L=0$ und $L=3$. Für $L=1$ existiert keine Lösung, da hier der Anteil der D-Funktionen in der Summe von (II.49) Null wird.

(i) $L=0$

Die zu lösende Differentialgleichung ist hier

$$-\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{d}{d\gamma} \sin 3\gamma \frac{d}{d\gamma} \phi_0^{\lambda \mu 0}(\gamma) = \lambda(\lambda+3) \phi_0^{\lambda \mu 0}(\gamma) \quad (\text{II.50})$$

Diese Gleichung ist leicht durch einen Potenzreihenansatz zu

lösen, wobei sich herausstellt, dass λ ein vielfaches von 3 sein muss:

$$\lambda = 3m \quad (m=0,1,\dots)$$

Die Bedeutung von m ist gerade diejenige, die im Abschnitt über die Klassifikation der Zustände erklärt wurde, d.h. m gibt an, wie oft die Kopplung von 3 Phononen zu $L=0$ vorkommt. Die analytische Lösung ist schliesslich

$$\phi_0^{\lambda=3m,0}(\gamma) \sim P_m(\cos 3\gamma) \quad (\text{II.51})$$

(ii) $L=3$

Für K gibt es zwei Werte ($K=0,2$), aber wegen dem Faktor

$$[D_{mK}^3 + (-1)^3 D_{m-K}^3]$$

in der Wellenfunktion (siehe (II.49)) verschwindet die Lösung zu $K=0$, d.h. nur $K=2$ gibt eine nichtverschwindende Lösung. Die Differentialgleichung lautet für diesen Fall

$$\left[-\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{d}{d\gamma} \sin 3\gamma \frac{d}{d\gamma} + \frac{9}{\sin^2 3\gamma} \right] \phi_2^{\lambda,3}(\gamma) = \lambda(\lambda+3) \phi_2^{\lambda,3}(\gamma) \quad (\text{II.52a})$$

Dabei wurden die Relationen

$$\frac{7}{8\pi^2} \int D_{3+2}^3 L_K^{12} D_{3-2}^3 \sin \vartheta_2 d\vartheta_1 d\vartheta_2 d\vartheta_3 = 4, \quad K=1,2,3$$

und

$$\frac{1}{\sin^2 \gamma} + \frac{1}{\sin^2(\gamma - \frac{2\pi}{3})} + \frac{1}{\sin^2(\gamma - \frac{4\pi}{3})} = \frac{9}{\sin^2 3\gamma} \quad \text{benutzt.}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist (Potenzreihenansatz):

$$\phi_2^{\lambda=3m+3,3}(\gamma) \sim P_{m+1}^1(\cos 3\gamma) \quad (\text{II.52b})$$

Die Bedingung für λ ist $\lambda=3m+3$, damit eine Lösung existiert. $P_{m+1}^1(\cos 3\gamma)$ sind die assoziierten Legendrepolynome.

Aufbauend auf diese Lösungen werden die Lösungen für beliebigen geraden und ungeraden Drehimpuls konstruiert. Bevor dies allerdings geschehen kann, muss die allgemeine Struktur der Funktionen erkundet werden. Dazu kann das Problem noch vereinfacht werden: Da die Differentialgleichung $\hat{A}^2 \phi_k^{\lambda, \ell}(\gamma) = \lambda(\lambda+3) \phi_k^{\lambda, \ell}(\gamma)$ nicht von $\hbar$, B_2 und C_2 abhängt, ist es von Nutzen $\hbar=B_2=C_2=1$ zu betrachten. Die ganzen Formeln werden dann übersichtlicher.

Im folgenden werden noch einige andere Notationen eingeführt, die oft verwendet werden.

(b) Einführung oft verwendeter Ausdrücke

Die kollektiven Koordinaten (Impulse) $\alpha_{2m}(\pi_{2m})$ werden durch $\alpha_m(\pi^m)$ abgekürzt. Für $\alpha_{2m}^*(\pi_{2m}^*)$ wird $\alpha^m(\pi_m)$ geschrieben:

$$\alpha_{2m} \longrightarrow \alpha_m, \quad \alpha_{2m}^* \longrightarrow \alpha^m \quad (\text{II.53})$$

$$\pi_{2m} \longrightarrow \pi^m, \quad \pi_{2m}^* \longrightarrow \pi_m$$

Diese Schreibweise wurde deshalb gewählt, um die gleiche Transformationseigenschaft von α^m und π^m bzw α_m und π_m zu unterstreichen.

Bosonenerzeugungsoperator:

$$\beta_m^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_m + i \pi_m) \quad (\text{II.54a})$$

Bosonenvernichtungsoperator:

$$\beta^m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha^m + i \pi^m) \quad (\text{II.54b})$$

Die Kommutationsrelation zwischen ihnen ist

$$[\beta^m, \beta_{m'}^+] = \delta_{mm'} \quad (\text{II.55})$$

Dies ist formal dasselbe, als wenn

$$\beta^m = \frac{\partial}{\partial \beta_m^+} \quad (\text{II.56})$$

gesetzt wird. Die Wirkung auf ein Polynom $P(\beta_m^+)$ ist deshalb:

$$\beta^m P(\beta_m^+) |0\rangle = \frac{\partial}{\partial \beta_m^+} P(\beta_m^+) |0\rangle = P'(\beta_m^+) |0\rangle \quad (\text{II.57})$$

Zu beachten ist, dass dies nur dann immer gilt, falls die Wirkung des ganzen Ausdrucks auf den Grundzustand betrachtet wird, was leicht einzusehen ist, wenn β^m auf $(\beta_m^+)^k$ wirkt:

$$\beta^m (\beta_m^+)^k |0\rangle = k (\beta_m^+)^{k-1} |0\rangle + \underbrace{(\beta_m^+)^k \beta^m |0\rangle}_{=0} \quad (\text{II.58})$$

Dabei ist die Kommutationsrelation (II.55) verwendet worden. Zum Schluss seien noch der Teilchenzahloperator und die Komponenten des Drehimpulses in den Bosonenerzeugungs- und -vernichtungsoperatoren definiert:

$$\text{Teilchenzahloperator: } \hat{N} = \sum_{m=-2}^{+2} \beta_m^+ \beta^m = \sum_{m=-2}^{+2} \beta_m^+ \frac{\partial}{\partial \beta_m^+} \quad (\text{II.59a})$$

$$\text{Drehimpulsoperator: } L_q = \sqrt{6} \sum_{mm'} (221|mm'q) \beta_m^+ \frac{\partial}{\partial \beta_m^+} \quad (\text{II.59b})$$

($q = -1, 0, +1$)

Die Konstruktion der sphärischen Drehimpulskomponenten ist wie üblich. Wenn $\alpha_{\ell m}$ die sphärischen Komponenten eines Tensors zum Drehimpuls ℓ sind und $\pi_{\ell m}$ die dazugehörigen generalisierten Impulse, so gilt stets

$$L_q = a \sum_{mm'} (\ell \ell 1|mm'q) \alpha_{\ell m} \pi_{\ell m'} \quad (\text{II.60})$$

a ist eine Normierungskonstante, die dadurch bestimmt ist, dass die Eigenwerte von L gleich M sein müssen. In Tabelle

II.5 ist alles nochmals zusammengefasst. Zu allerletzt sei noch eine abkürzende Schreibweise angegeben:

Wenn ν Operatoren β_m^+ zum Drehimpuls L gekoppelt werden, mit der maximalen magnetischen Projektion $M=L$, so soll dafür geschrieben werden:

$$\left[\beta^{+[2]} \times \dots \times \beta^{+[2]} \right]_{m=1}^{[L]} \sim (\nu, L) \quad (\text{II.61})$$

Entsprechendes gilt für β^m und α_m

$$\beta^m: \langle \nu, L \rangle \quad (\text{II.62a})$$

$$\alpha_m: \{ \nu, L \} \quad (\text{II.62b})$$

Tabelle II.5

$$\alpha_{2m} = i\alpha_m, \quad \pi_{2m} = \pi_m$$

$$\alpha_{2m}^* = -i\alpha_m^*, \quad \pi_{2m}^* = \pi_m$$

$$[\alpha_m, \pi_m] = i\delta_{m,0} \quad (\hbar=1)$$

$$\beta_m^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_m - i\pi_m)$$

$$\beta_m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_m + i\pi_m)$$

$$[\beta_m, \beta_{m'}^\dagger] = \delta_{m,m'}, \quad \text{mit } \beta_m = \frac{\partial}{\partial \beta_m^\dagger}$$

$$\hat{N} = \sum_{m=-2}^{+2} \beta_m^\dagger \beta_m$$

$$L_q = \sqrt{6} \sum_{mm'} (2 \ 2 \ 1 | m \ m' \ q) \beta_m^\dagger \beta_{m'}$$

$$\text{z.B. } L_1 = - \sum_{m=-2}^{+2} \left[\frac{1}{2} (3+m)(2-m) \right]^{\frac{1}{2}} \beta_{m+1}^\dagger \beta_m$$

$$L_0 = \sum_{m=-2}^{+2} m \beta_m^\dagger \beta_m$$

$$[\beta^{[2]} \times \dots \times \beta^{[2]}]_{M=L}^{[L]} \sim (L, L)$$

$$[\beta^{[2]} \times \dots \times \beta^{[2]}]_{M=L}^{[L]} \sim \langle L, L \rangle$$

$$[\alpha^{[2]} \times \dots \times \alpha^{[2]}]_{M=L}^{[L]} \sim \{L, L\}$$

(c) Skizizierung des Vorgehens

Zuerst wird ein Polynom in den Bosonenerzeugungsoperatoren konstruiert, das alle nötigen Voraussetzungen erfüllt. D.h. sie sollen Lösungen von H_5 sein und Zustände darstellen zu einer festen Phononenzahl ν , Seniorität λ und Drehimpuls L . Dabei wird dieser Schritt in drei Teile zerlegt:

(i) Zunächst konstruiere man ein Polynom in den Erzeugungsoperatoren, homogen vom Grade ν , d.h.

$$\hat{N} P_\nu(\beta_m^+) = \sum_{m'} \beta_{m'}^+ \frac{\partial}{\partial \beta_{m'}^+} P_\nu(\beta_m^+) = \nu P_\nu(\beta_m^+) \quad (\text{II.63})$$

Dieses Polynom wird aus grundlegenden Kopplungsfaktoren (elementary factors) aufgebaut: (1,2), (2,0), (2,2), (3,0), (3,3). Diese Faktoren werden so angeordnet, dass $P_\nu(\beta_m^+)$ einen definierten Drehimpuls erhält.

(ii) Da sich herausstellen wird; dass das Polynom nach keine gute Seniorität hat, wird eine Transformation

$$\beta_m^+ \longrightarrow a_m^+(\beta_{m'}^+, \beta_{m'}) \quad (\text{II.64})$$

vorgenommen, und zwar so, dass die alten Eigenschaften des Polynoms erhalten bleiben, aber das neue Polynom nun definite Seniorität hat. Die a_m^+ sind zwar Funktionen von $\beta_{m'}^+$ und $\beta_{m'}$, aber nicht mit Bosonenoperatoren zu verwechseln! Das neue Polynom ist somit nicht nur eine Funktion von β_m^+ , sondern auch von β_m .

(iii) Ausgehend von diesem Ergebnis für $L=0$ und $L=3$ wird eine übersichtlichere Form der Wellenfunktionen als Funktion von β_m^+ und β_m konstruiert. Für β_m wird dann die Eigenschaft (II.56) ausgenutzt, sodass das daraus erhaltene

Polynom nur noch von β_m^+ abhängt.

Das Resultat ist eine Funktion mit allen gewünschten Eigenschaften

Da sie aber noch als Funktion in β_m^+ vorliegt und nicht wie es sein sollte, als Funktion von β, γ und (γ_i^j) , wird der nun letzte Schritt durchgeführt:

Eine einfache Regel gibt an wie das Polynom in α_m aus dem in β_m^+ direkt konstruiert werden kann, ohne grösseren Aufwand.

$$P_\nu(\beta_m^+) |0\rangle \longrightarrow \tilde{P}_\nu(\alpha_m) \quad (\text{II.65})$$

Da α_m eine Funktion von β, γ und γ_i^j ($i=1,2,3$) ist, erhält man die Wellenfunktion

$$\psi(\beta, \gamma, \gamma_i^j) \quad (\text{II.65})$$

Durch Einsetzen der Funktion $\alpha_m(\beta, \gamma, \gamma_i^j)$ in (II.65) und nach Vergleich mit (II.49) liegt der analytische Ausdruck für $\psi_{\kappa}^{\lambda, \mu}(\gamma)$ vor (siehe Tabelle II.6).

(α), (i) An das Polynom $P(\beta_m^+)$ werden folgende Forderungen gestellt:

$$\begin{aligned} (a) \quad \hat{N} P &= \nu P \\ (b) \quad L_1 P &= 0 \\ (c) \quad L_0 P &= L P \end{aligned} \quad (\text{II.66})$$

(II.66a) bedeutet, dass P homogen vom Grade ν in den β_m^+ sein muss (siehe (II.63)), d.h. es muss aus Bosonen aufgebaut sein und die Terme des Polynoms müssen die Struktur

$$(\beta_{-2}^+)^{n_2} (\beta_{-1}^+)^{n_1} (\beta_0^+)^{n_0} (\beta_1^+)^{n_1} (\beta_2^+)^{n_2} \quad (\text{II.67})$$

haben.

(II.66b) besagt, dass das Polynom mit $M=L$ konstruiert wird. Alle anderen Komponenten ($M=L$) des Polynoms können durch Auf- (L_+) und Absteigeoperatoren (L_-) erzeugt werden. Ausserdem ist dieser Tatbestand hier nicht wichtig, da die M -Abhängigkeit bereits in den D_{MK}^L -Funktionen in (II.49) steckt und $\phi_k^{\lambda_M L}(\gamma)$ nicht von M abhängt!

(II.66c) stellt schliesslich mit (II.66b) sicher, dass das Polynom den Drehimpuls L besitzt. Die Forderungen (II.66a-c) lassen sich sofort wie folgt erfüllen:

Die Polynome werden aus Produkten der fundamentalen Kopplungen aufgebaut:

$$\begin{aligned} (1,2) &= \beta_2^+ \\ (2,0) &= \sqrt{5} [\beta^{+[2]} \times \beta^{+[2]}]_0^{[0]} \\ (2,2) &\sim [\beta^{+[2]} \times \beta^{+[2]}]_2^{[2]} \\ (3,0) &\sim [[\beta^{+[2]} \times \beta^{+[2]}]_2^{[2]} \times \beta^{+[2]}]_0^{[0]} \\ (3,3) &\sim [[\beta^{+[2]} \times \beta^{+[2]}]_2^{[2]} \times \beta^{+[2]}]_3^{[3]} \end{aligned}$$

(dass dies richtig ist, wird im Anhang (C) bewiesen, ist aber anschaulich zu verstehen). Aus diesen Faktoren lassen sich alle Drehimpulse aufbauen und jede beliebige Phononenzahl wird erreicht. Dies sei an einigen Beispielen erläutert:

(i) $L=2, \nu=4$

Es gibt zwei Möglichkeiten:

$$(2,2)(2,0)$$

$$(1,2)(3,0)$$

Da jeder Faktor (ν, L) zu $M=L$ gekoppelt ist, bedeuten Produkte aus diesen Faktoren ein lineares Ankoppeln (siehe Fig.II.5).

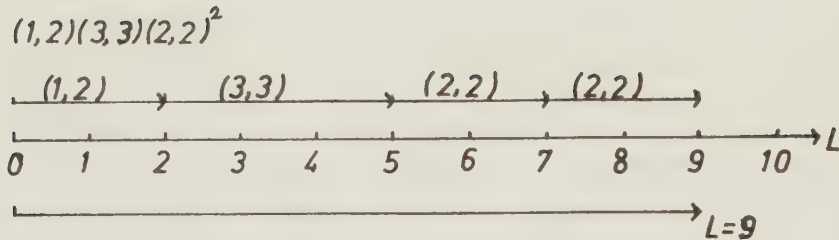


Fig. II.5

Der erste Ausdruck hat also Drehimpuls $1*2+1*0=2$ und die Phononenzahl ist $1*2+1*2=4$. Der zweite hat Drehimpuls $1*2+1*0=2$ und die Phononenzahl ist $1*1+1*3=4$.

(ii) Die ungeraden Drehimpulse können durch Multiplikation mit dem Faktor $(3,3)$ aus den Polynomen mit geradem Drehimpuls erreicht werden. Z.B: $(3,3)(2,2)(2,0)$. Es hat Drehimpuls $L=5$, Phononenzahl $\nu=7$.

Das Polynom soll somit die folgende Form haben (Beweis siehe Anhang (C)):

$$(3,3)^{n_5} (1,2)^{n_4} (2,2)^{n_3} (3,0)^{n_2} (2,0)^{n_1}$$

mit
$$n_5 = \begin{cases} 0 & ; L = \text{gerade} \\ 1 & ; L = \text{ungerade} \end{cases} \quad (\text{II.68})$$

Im folgenden ist es von Vorteil stets zwischen geraden und ungeraden Drehimpuls zu unterscheiden. Ist er gerade, so wird " L " geschrieben und ist er ungerade " $\bar{L}$ ".

Aus den Bestimmungsgleichungen in (II.68) lassen sich die Struktur des Polynoms für geraden und ungeraden Drehimpuls erschliessen:

L=gerade

$$(1,2)^{L-\nu+3m+2n_1} (2,2)^{\nu-\frac{L}{2}-3m-2n_1} (3,0)^m (2,0)^{n_1} \quad (\text{II.69a})$$

L=ungerade

$$(3,3) (1,2)^{\bar{L}-3-\nu+3m+2n_1} (2,2)^{\nu-\frac{\bar{L}-3}{2}-3m-2n_1} (3,0)^m (2,0)^{n_1} \quad (\text{II.69b})$$

Bereits hier lässt sich die Bedeutung der zusätzlichen Quantenzahl erkennen: Sie gibt an wie oft die Kopplung (3,0) vorkommt, bei der drei Phononen zum Drehimpuls Null gekoppelt sind.

Im folgenden ist es einfacher $\nu=\lambda$ zu setzen. Dies ändert nichts am Winkelanteil, sondern nur am Radialanteil $F_{n\lambda}(\beta)$ (mit $n=\frac{\nu-\lambda}{2}$). Für $\nu=\lambda$ (d.h. $n=0$) hat er die Form

$$F_{0\lambda}(\beta) \sim \beta^\lambda e^{-\frac{1}{2}\beta^2} \quad (\text{II.70})$$

Zu $\nu \neq \lambda$ kommt man, indem $F_{0\lambda}$ mit dem entsprechenden Laguerrepolynom $L_n^{\lambda+\frac{3}{2}}(\beta^2)$ multipliziert wird. Da wir aber nur am χ -abhängigen Anteil interessiert sind, wird kein Fehler gemacht indem $\nu=\lambda$ gesetzt wird!

(II.69a) und (II.69b) sind per Konstruktion Polynome mit definitivem Drehimpuls und definierter Phononenzahl. Hat es auch bereits gute Seniorität? Was muss das Polynom erfüllen, wenn es gute Seniorität hat? Es muss gelten

$$\hat{N}^2 P = \lambda(\lambda+3) P \quad (\text{II.71})$$

In (II.34) ist der Senioritätsoperator angegeben. Danach müsste gelten, mit $NP=\lambda P$ ($\nu=\lambda$):

$$\begin{aligned} \hat{N} P &= N(N+3)P - (\beta^\dagger \cdot \beta^\dagger)(\beta \cdot \beta)P = \\ &= \lambda(\lambda+3)P - (\beta^\dagger \cdot \beta^\dagger)(\beta \cdot \beta)P = \lambda(\lambda+3)P \end{aligned} \quad (\text{II.72})$$

Diese Gleichung ist nur zu erfüllen, wenn (mit $\beta^m = \frac{\partial}{\partial \beta_m^\dagger}$)

$$(\beta, \beta) P = 0 = \sum_m (-1)^m \frac{\partial^2}{\partial \beta_m^+ \partial \beta_{-m}^+} P \quad (\text{II.73})$$

gilt. (II.73) wird als "Harmonizitätsbedingung" bezeichnet, analog zu dem Fall des 3-dimensionalen harmonischen Oszillators:

$$\Delta R_n^L(r) Y_m^L(\vartheta, \varphi) = 0 \quad (\text{II.74})$$

Leider erfüllen die oben konstruierten Polynome nicht die Bedingung (II.73). Aus diesem Grunde wird folgender Trick angewendet, der auf einer Idee von Lohe (19) zurückgeht:

Man ersetze die alten Bosonenoperatoren β_m^+ durch neue Operatoren, die Funktionen von β_m^+ und β_m sind: $\beta_m^+ \rightarrow a_m^+(\beta_m^+, \beta_m)$ (II.75)

Damit die alten konstruierten Eigenschaften erfüllt bleiben, müssen die neuen Operatoren folgende Bedingungen erfüllen:

(a) Wenn sie auf einen Zustand angewendet werden, dürfen diese die Phononenzahl nur um 1 erhöhen. Dies hat zur Folge, dass ein Polynom vom Grade ν in a_m^+ auch nur Phononen erzeugt. Damit bleibt die alte Eigenschaft $\hat{N}P(a_m^+) = \nu P(a_m^+)$ erhalten

(b) a_m^+ muss ebenfalls Drehimpuls 2 haben. Damit sind die Kopplungen in (II.69a) und (II.69b) dieselben und das resultierende Polynom hat denselben Drehimpuls.

(c) Als letztes müssen die a noch eine Kommutationsrelation erfüllen:

$$[a_m^+, a_m^+] = 0 \quad (\text{II.76})$$

Diese Bedingung wird allerdings erst später benötigt, wo ihr Sinn auch klar wird. Wegen (II.76) darf nicht die Schlussfolgerung gezogen werden, dass a_m^+ ein Bosonenoperator ist!

Der Ansatz der nun zum Ziel führt ist (7,19):

$$a_m^+ = \beta_m^+ - (2,0)(2N+5)^{-1} \beta_m \quad (\text{II.77})$$

Die Kopplungen für β_m^+ in den Polynomen geht dann in die Kopplung für die a_m^+ über (siehe Tabelle II.5):

$$\begin{aligned} (3,3) &\longrightarrow [3,3] \\ (1,2) &\longrightarrow [1,2] \\ (2,2) &\longrightarrow [2,2] \\ (3,0) &\longrightarrow [3,0] \\ (2,0) &\longrightarrow [2,0] \end{aligned} \quad (\text{II.78})$$

Im folgenden wird gezeigt, dass das Polynom nicht von $[2,0]$ abhängen darf, da dies angewendet auf den Grundzustand $|0\rangle$ Null ergibt: In Ref (17) ist gezeigt, dass $[2,0] = \sum_m a_m^+ a_m^{+m}$ proportional zu $\langle 2,0 \rangle = \sum_m \beta_m \beta_m^m$ ist. Da β_m angewendet auf $|0\rangle$ Null ergibt (Vernichtung eines Phonons) muss der Exponent n_1 von $[2,0]$ gleich Null sein:

$$n_1 = 0 \quad (\text{II.79})$$

Damit ergibt sich die entgeltige Form für die Polynome in a_m^+ :

L=gerade

$$[1,2]^{L-\lambda+3m} [2,2]^{(2\lambda-L)/2-3m} [3,0]^m |0\rangle \quad (\text{II.80a})$$

$\bar{L}$ =ungerade

$$[1,2]^{\bar{L}-\lambda+3m} [2,2]^{(2\lambda-\bar{L}-3)/2-3m} [3,3][3,0]^m |0\rangle \quad (\text{II.80b})$$

Dass diese Polynome auch definite Seniorität besitzen, ist leicht anhand der Harmonizitätsbedingung (II.73) nachzuprüfen. Mit der Bedingung (II.76), dass alle a miteinander vertauschen und dass $[2,0] \sim \langle 2,0 \rangle = \sum_m \beta_m \beta_m^m$ ist folgt:

$$\begin{aligned} [2,0] P_{\lambda, \mu, L}(a_m^+) |0\rangle &= P_{\lambda, \mu, L}(a_m^+) [2,0] |0\rangle \sim \\ &\sim P_{\lambda, \mu, L}(a_m^+) \langle 2,0 \rangle |0\rangle = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.81})$$

da ja β_m^+ auf $|0\rangle$ angewendet Null ergibt. Aus der Bedingung,

dass die Exponenten in (II.80a) und (II.80b) ≥ 0 sein müssen, erhält man eine Bedingung für die Quantenzahl :

L=gerade

$$L - \lambda + 3M \geq 0, \frac{1}{2}(2\lambda - L) - 3M \geq 0, M \geq 0, \\ \text{d.h. } \frac{L}{2} \leq \lambda - 3M \leq L \quad (\text{II.82a})$$

L=ungerade

$$L - \lambda + 3M \geq 0, \frac{1}{2}(2\lambda - L - 1) - 3M \geq 0, M \geq 0 \\ \text{d.h. } \frac{(L-1)}{2} \leq (\lambda - 3M) \leq (L-1) \quad (\text{II.82b})$$

Dies sei an einigen Beispielen illustriert.

Beispiele:

(a) $L=4, \lambda=4$

Aus (II.82a) folgt

$$2 \leq 4 - 3M \leq 4, \text{ d.h. } 0 \leq M \leq \frac{2}{3}$$

Da M ganzzahlig ist, folgt daraus, dass M nur den Wert 0 annehmen kann:

$$M=0$$

Dieses Ergebnis ist auch einleuchtend, denn wäre $M=1$, d.h. 3 Phononen sind zu Null gekoppelt, so bliebe nur ein Phonon übrig, das zu $L=4$ koppeln müsste, was natürlich unmöglich ist.

(b) $L=6, \lambda=6$

Gemäss (II.82a) gilt

$$3 \leq 6 - 3M \leq 6, \text{ d.h. } 0 \leq M \leq 1$$

d.h. M nimmt die Werte 0 und 1 an!

(i) $M=0$

Hier koppeln alle Phononen zusammen zu $L=6$.

(ii) $M=1$

3 Phononen koppeln zu Null und die restlichen drei Phononen zu $L=6$. Da jedes Phonon Drehimpuls 2 besitzt, müssen sie linear aneinanderkoppeln.

Generell lässt sich sagen, dass es für $L \leq 6$ zu festem L , und λ nur ein mögliches μ gibt. Ab $L=6$ kann es aber zwei Werte für μ geben, ab $L=12$ drei Werte, ab $L=18$ vier usw.. Man könnte jetzt in (II.80a) und (II.80b) die $a_m^\dagger$ -Operatoren durch ihre Ausdrücke (II.77) in $\beta_m^\dagger$ und β_m ersetzen, der daraus erhaltene Ausdruck ist aber zu umständlich. Im weiteren Verlauf wird aber das Ergebnis für $L=0$ und $L=3$ verwendet. Aus diesem Grunde seien sie noch einmal aufgeführt:
 $L=0$

$$|\lambda=3, \mu, \mu, 0\rangle = [3, 0]^M |0\rangle \quad (\text{II.83a})$$

$L=3$

$$|\lambda=3, \mu+3, \mu, 3\rangle = [3, 3][3, 0]^M |0\rangle \quad (\text{II.83b})$$

Im folgenden beschränke ich mich auf geraden Drehimpuls. Nachdem die Wellenfunktionen zu L =gerade konstruiert worden sind, wird gezeigt, dass die Konstruktion zu $\bar{L}$ =ungerade vollkommen analog ist.

L =gerade

Die Form der Polynome ist; wie (II.80a) zeigte,

$$[1, 2]^a [2, 2]^b [3, 0]^c |0\rangle \quad (\text{II.85})$$

Da $a_m^\dagger$ sowohl von $\beta_m^\dagger$ als auch von β_m abhängt, ist das Polynom in (II.85) eine Funktion in $\beta_m^\dagger$ und β_m . Man könnte deshalb versuchen auf einfache Art und Weise ein Polynom in $\beta_m^\dagger$ und β_m direkt zu konstruieren.

Ausgegangen wird von dem $L=0$ -Polynom

$$[3,0]^M |0\rangle \quad (\text{II.86})$$

Es besteht aus $3(M)$ Phononen und hat per Konstruktion definierte Seniorität. Auf diesem Zustand werden jetzt Bosonenvernichtungsoperatoren β_2 (mit der magnetischen Projektion 2, d.h. $\beta_2 = \langle 1,2 \rangle$) angewendet:

$$\beta_2^T [3,0]^M |0\rangle \quad (\text{II.87})$$

T Bosonen werden vernichtet. Das resultierende Polynom besitzt $3(M)-T$ Phononen und da β_2 den Drehimpuls 2 besitzt, hat (II.87) den Drehimpuls 2! (II.87) hat nach wie vor definierte Seniorität, denn die Harmonizitätsbedingung (II.73) ist erfüllt:

$$\langle 2,0 \rangle [\beta_2^T [3,0]^M |0\rangle] = 0 \quad (\text{II.88})$$

Da $\langle 2,0 \rangle$ mit β_2 vertauscht und somit direkt auf $[3,0]^{M+T} |0\rangle$ angewendet wird, dies aber per Konstruktion definierte Seniorität besitzt, ist λ eine gute Quantenzahl für den Zustand (II.87). Anschliessend wird $[1,2] = a_2^+$ mehrmals auf (II.87) angewendet (β_2^+ kann nicht verwendet werden, da dies mit β_m und somit mit $\langle 2,0 \rangle$ nicht vertauscht. Die Folge wäre ein Zustand nicht definierter Seniorität. a_2^+ aber angewendet auf einen Zustand definierter Seniorität verändert dieses Verhalten nicht, wie aus (II.85) zu erkennen ist). Das vorläufige Ergebnis ist somit:

$$(a_2^+)^L \beta_m^T [3,0]^M |0\rangle \quad (\text{II.89})$$

Es besitzt die Seniorität

$$\lambda = 3M - T + L$$

was wegen $\nu = \lambda$ gleich der Anzahl der Phononen ist und der Drehimpuls beträgt

$$L = 2(L+T) \Rightarrow L+T = \frac{L}{2}$$

Weiterhin muss $L, T, M \geq 0$ sein, damit die Exponenten in

(II.89) ≥ 0 sind.

(II.89) ist der Ausgangspunkt der endgültigen Konstruktion der Wellenfunktion. Von ihnen ausgehend lässt sich ein übersichtlicher Ausdruck für ein Polynom $P(\beta_m^+)$ in β_m^+ finden, das wie (II.89) gute Seniorität λ und guten Drehimpuls besitzt. Dazu ist es nützlich die Lösung für $L=0$ zu kennen: Da $L=0$ ist, kann das Polynom $[3,0]^M |0\rangle$ nur aus $(2,0)$ und $(3,0)$ zusammengesetzt sein:

$$[3,0]^M |0\rangle = \sum_r B_r^M (2,0)^{3r} (3,0)^{M-2r} |0\rangle \quad (\text{II.90})$$

Die B_r^M müssen noch bestimmt werden. Dies geht aber sehr einfach. Dazu wird eine Regel benutzt, die in Ref.(18) angegeben und im Anhang (D) bewiesen ist. Sie besagt, dass mit Kenntnis des Polynoms in β_m^+ sofort die Lösung in Abhängigkeit von α_m angegeben werden kann:

$$P_{\lambda M L}(\beta_m^+) |0\rangle = \pi^{-\frac{r}{4}} 2^{\frac{\lambda}{2}} P_{\lambda M L}(\alpha_m) e^{-\frac{\beta^2}{2}} \quad (\text{II.91})$$

Dies gilt für alle $r=(2\ell+1)$ -dim. Oszillatoren, also speziell für unseren Fall $\ell=2$. In (II.90) liegt das Polynom in vor, somit gilt

$$\begin{aligned} \sum_r B_r^M (2,0)^{3r} (3,0)^{M-2r} |0\rangle &= \\ &= \pi^{-\frac{r}{4}} 2^{\frac{\lambda}{2}} \sum_r B_r^M \{2,0\}^{3r} \{3,0\}^{M-3r} e^{-\frac{\beta^2}{2}} \end{aligned} \quad (\text{II.92})$$

$\{2,0\}$, $\{3,0\}$ sind die Kopplungen in α_m mit der Eigenschaft

$$\{2,0\} = \sqrt{5} [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]_0^{[0]} = \beta^2 \quad (\text{II.93a})$$

$$\{3,0\} = -\sqrt{35} [[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]}]_0^{[0]} = \sqrt{2} \beta^3 \cos 3\gamma \quad (\text{II.93b})$$

Eingesetzt in (II.92) ergibt dies etwas proportional zu

$$2^{\frac{\lambda}{2}} \beta^{3M} \sum_r B_r^M (\cos 3\gamma)^{M-2r} e^{-\frac{\beta^2}{2}} \quad (\text{II.94})$$

Die Lösung zu $L=0$ ist aber schon bekannt und ist in (II.51)

angegeben. Ein Vergleich von (II.51) mit (II.94) ergibt für B_r^m

$$B_r^m = \frac{(-1)^r (2^m - 2r - 1)!!}{r! (m - 2r)!} \quad , \text{ mit } (m!!) = m(m-2)\dots \frac{1}{2} \text{ oder (II.95)}$$

Dieser Ausdruck wird später benötigt! Die nächsten Schritte sind einfach: Zunächst wird $(a_2^+)^{\delta} = (\beta_2^+ - (2,0)(2\hat{N}+5)^{-1}\beta_2^-)$ ausgerechnet und eingesetzt. Es gilt

$$(a_2^+)^{\delta} = \sum_{n=0}^{\delta} (\beta_2^+)^{\delta-n} (2,0)^n R_n^{\delta}(\hat{N}) \beta_2^- \quad (\text{II.96a})$$

mit

$$R_n^{\delta}(\hat{N}) = (-1)^n \binom{\delta}{n} \frac{(2\hat{N} + 2\delta + 1)!!}{(2\hat{N} + 2\delta + 2n + 1)!!} \quad (\text{II.96b})$$

(was im Anhang (E) bewiesen wird). Im Falle $\delta = 1$ ist es leicht einzusehen:

$$(a_2^+)^1 = \beta_2^+ - (2,0)(2\hat{N}+5)^{-1}\beta_2^- = \sum_{n=0}^1 (\beta_2^+)^n (2,0)^n R_n^1(\hat{N}) \beta_2^-$$

Hier ist $R_0^{\delta}(\hat{N}) = 1$ und $R_1^{\delta}(\hat{N}) = -(2\hat{N}+5)^{-1}$. Daraus folgt, dass das Polynom (II.89) nun mit (II.90) folgende Form erhält:

$$\sum_n (\beta_2^+)^{\delta-n} (2,0)^n R_n^{\delta}(\hat{N}) (\beta_2^+)^{J+n} \sum_r B_r^m (2,0)^{3r} (3,0)^{m-2r} \quad (\text{II.97})$$

Zum Schluss wird $(\beta_2^-)^{J+n}$ auf $\sum_r B_r^m (2,0)^{3r} (3,0)^{m-2r}$ angewendet. Dabei ist zu beachten, dass folgendes gilt:

Mit (II.56) gilt

$$\beta_2^- = (-1)^2 \beta_2^2 = (-1)^2 \frac{\partial}{\partial \beta_{-2}^+} \quad (\text{II.98})$$

Weiterhin gilt

$$\frac{\partial}{\partial \beta_{-2}^+} (2,0) = 2(1,2) \quad (\text{II.99a})$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_{-2}^+} (3,0) = 3(2,2) \quad (\text{II.99b})$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_{-2}^+} (1,2) = \frac{\partial}{\partial \beta_{-2}^+} (2,2) = 0 \quad (\text{II.99c})$$

Wird dies in (II.97) verwendet, so ist das endgültige Ergebnis des Polynoms in β_m^+ :

$$\sum_{r,n} C_{rn}^{\delta J m} (1,2)^{\delta+J-n} (2,2)^n (2,0)^{3r-J+n} (3,0)^{m+J-2r-n} |0\rangle \quad (\text{II.100})$$

mit

$$\begin{aligned} C_{rn}^{\delta J m} &= B_r^{m+J} 2^{J-n} 3^n \frac{(3r)!(m+J-2r)!}{(m+J-2r-n)!} \sum_s 2^s \binom{J+s}{n} \frac{R_s^{\delta}(3m+2J-s)}{(3r-J+n-s)!} = \\ &= \frac{3^n 6! \lambda! (-1)^r 2^r (2m+2J-2r)! (3r)!}{2^{m+n} n! (2\lambda+1)! r! (m+J-r)! (m+J-n-2r)!} \cdot \\ &\quad \cdot \sum_s \frac{(-1)^s 4^s (J+s)! (2\lambda+1-2s)!}{s! (6-s)! (J-n+s)! (3r-J+n-s)! (\lambda-s)!} \end{aligned} \quad (\text{II.101})$$

Jetzt kann wieder die Regel (II.91) angewendet werden:

$$\begin{aligned} \sum_{r,n} C_{rn}^{\delta J n} (1,2)^{\delta+J-n} (2,2)^n (2,0)^{3r-J+n} (3,0)^{m+J-2r-n} |0\rangle &= \\ = \pi^{-\frac{r}{4}} 2^{\frac{J}{2}} e^{-\beta^2/2} \sum_{r,n} C_{rn}^{\delta J n} \{1,2\}^{\delta+J-n} \{2,2\}^n \{2,0\}^{3r-J+n} \{3,0\}^{m+J-2r-n} \end{aligned} \quad (\text{II.102})$$

mit $\delta+J=\frac{L}{2}$

Die geschweiften Klammern geben die Kopplungen in den α 's an.

Der Rest ist nun einfach: Die Funktionen α_{2m} werden durch β, γ und ψ_i ersetzt:

$$\begin{aligned} \alpha_{2m} &= \sum_k D_{mk}^{2*} a_k \\ a_{2-2} &= a_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \chi \\ a_{20} &= \beta \cos \chi \\ a_{2-1} &= a_{21} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.103})$$

Für die Kopplung $\{2,0\}$ und $\{3,0\}$ ergibt sich gemäss (II.93a,b)

$$\{2,0\} = \beta^2, \quad \{3,0\} = \sqrt{2} \beta^3 \cos 3\chi$$

Da nur ihr Exponent in (II.102) von r abhängt, kann diese Summe bereits ausgerechnet werden:

$$\begin{aligned} \sum_r C_{rn}^{\delta J n} \{2,0\} \{3,0\}^{m+J-2r-n} &= \sum_r C_{rn}^{\delta J n} (\cos 3\chi)^{m+J-n-2r} (-\sqrt{2})^{m+J-2r-n} \beta^{3m+J-n} = \\ &= \beta^{3m+J-n} f_n^{\delta J n}(\cos 3\chi) \end{aligned} \quad (\text{II.104})$$

Der Rest, d.h. $\{1,2\}^{\delta+J-n}$ und $\{2,2\}^n$, wird wie folgt be-

rechnet:

$$\{1,2\} = \alpha_2 = \sum_m D_{2m}^{2*} a_m = \beta \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [D_{22}^{2*}(\psi_i) + D_{2-2}^{2*}(\psi_i)] \sin \gamma + D_{20}^{2*}(\psi_i) \cos \gamma \right\} \quad (\text{II.105a})$$

und

$$\{2,2\} = \sqrt{7} [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]_2^{[2]} = \sqrt{7} \sum_m D_{2m}^{2*}(\psi_i) [a^{[2]} \times a^{[2]}]_m^{[2]} = (-\sqrt{2}) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [D_{22}^{2*}(\psi_i) + D_{2-2}^{2*}(\psi_i)] \sin(-2\gamma) + D_{20}^{2*}(\psi_i) \cos(-2\gamma) \right\} \quad (\text{II.105b})$$

Beliebige Potenzen von (II.105a) und (II.105.b) werden mit der Binomischen Formel ausgerechnet. Das Ergebnis ist:

$$[\{1,2\}]^{\frac{L}{2}-n} = \beta^{\frac{L}{2}-n} \sum_k D_{L-2n,k}^{L-2n*}(\psi_i) S_k^{L-2n}(\gamma) \quad (\text{II.106a})$$

und

$$[\{2,2\}]^n = (-\sqrt{2})^n \beta^n \sum_k D_{2n,k}^{2n*}(\psi_i) S_k^{2n}(\gamma) \quad (\text{II.106b})$$

Die Funktionen $S_k^{2r}(\gamma)$ sind in Tabelle (II.6) angegeben. Wird (II.106a,b) in (II.102) eingesetzt, so entsteht ein Produkt aus D-Funktionen der folgenden Form, das aber leicht vereinfacht werden kann (10,11):

$$D_{L-2n,k}^{L-2n*}(\psi_i) D_{2n,k}^{2n*}(\psi_i) = \sum_{k'} (L-2n, 2n, L | L-2n, 2n, L) (L-2n, 2n, L | k', k'', k) D_{Lk}^{L*}(\psi_i) \quad (\text{II.107})$$

Somit ergibt sich:

$$\pi^{-3/4} 2^{1/2} \beta^L e^{-\beta^2/2} \sum_n \left\{ \sum_k (-\sqrt{2})^n \sum_{k', k''} (L-2n, 2n, L | k', k'', k) \cdot S_{k'}^{L-2n}(\gamma) S_{k''}^{2n}(-2\gamma) f_n^{\delta T n}(\cos 3\gamma) \right\} D_{Lk}^{L*}(\psi_i) \quad (\text{II.108})$$

Führt man noch zur Abkürzung die Funktionen

$$G_k^{rL}(\gamma) = (-\sqrt{2})^n \sum_{k', k''} (L-2n, 2n, L | k', k'', k) S_{k'}^{L-2n}(\gamma) S_{k''}^{2n}(-2\gamma) \quad (\text{II.109})$$

und

$$\phi_k^{\lambda n L}(\gamma) = \sum_n G_k^{nL}(\gamma) f_n^{\delta T n}(\cos 3\gamma) \quad (\text{II.110})$$

ein, so lassen sich die Eigenfunktionen des 5-dimensionalen harmonischen Oszillators wie folgt schreiben: $\sim \beta^\lambda e^{-\frac{\beta^2}{2}} \sum_k \phi_k^{\lambda, \mu, L}(\gamma) D_{L, k}^{\mu, L}(\gamma)$. Diese Wellenfunktionen sind noch nicht normiert! Aber bereits hier lässt sich durch Vergleich mit (II.49) und (II.70) erkennen, dass der β -abhängige Anteil die Funktion $F_0^\lambda(\beta) \sim \beta^\lambda e^{-\frac{\beta^2}{2}}$ (mit $n = \frac{(\nu - \lambda)}{2}$) zur Seniorität $\lambda = \nu$ ist. Dies ist auch nicht verwunderlich, da wie bei der Konstruktion des (γ, γ_i) -abhängigen Anteils der Einfachheit halber $\lambda = \nu$ gesetzt hatten. Das eigentliche Ziel ist aber erreicht, nämlich einen analytischen Ausdruck der Funktion $\phi_k^{\lambda, \mu, L}(\gamma)$ zu erhalten. All diese Ergebnisse sind in Tabelle II.6 zusammengefasst.

Zunächst sei allerdings erwähnt, wie die Wellenfunktion zu ungeraden Drehimpuls konstruiert wird.

Ungerader Drehimpuls

Dabei sei eine Konvention eingeführt. Der ungerade Drehimpuls bzw. Seniorität wird durch

$$\bar{L} = L + 3, \quad \bar{\lambda} = \lambda + 3$$

ausgedrückt. Der Sinn ist der, dass $L = \text{ungerade}$ erzeugt werden kann aus einem geraden Drehimpuls L und anschließendem Addieren von Drehimpuls 3, der aus einer Kopplung von drei Phononen besteht. Entsprechendes gilt für $\bar{\lambda}$ und λ . Damit können wir das Ergebnis von (II.87) erweitern (siehe auch (II.80b)). Der einzige Unterschied besteht darin, dass noch die Kopplung $[3, 3]$ hinzukommt, die den ungeraden Drehimpuls erzeugt:

$$(a_2^+)^6 (\beta_2)^T [3, 3] [3, 0]^M |0\rangle, \text{ mit } \bar{L} + \bar{\lambda} = \frac{L}{2}, \quad \bar{L} = L + 3 \quad (\text{II.112})$$

Der restliche Weg verläuft vollkommen analog: (a_2^+) wird ein-

gesetzt und (β_2^J) wird auf den rechts stehenden Anteil angewendet. Das daraus resultierende Polynom in β_m^+ wird gemäss der Regel (II.91) durch Kopplungen in α_m ersetzt. Das endgültige Resultat für den γ -abhängigen Anteil ist:

$$\bar{\phi}_K^{\lambda\mu\bar{L}}(\gamma) = \sum_n G_K^{n\bar{L}}(\gamma) \bar{f}_n^{\lambda\mu\bar{L}}(\cos 3\gamma) \quad (\text{II.113})$$

Diese Funktionen sind in Tabelle II.6 zusammengefasst.

Tabelle II.6

L=gerade	$\bar{L}$ =ungerade
$\phi_K^{\lambda, m, L}(\gamma) = \sum_n G_K^{n, L}(\gamma) f_n^{\delta, J, M}(\cos 3\gamma)$ $\phi = L + 3m - \lambda$ $J = \lambda - 3m - \frac{L}{2}$ $f_n^{\delta, J, M}(\cos 3\gamma) = \pi^{-\frac{5}{4}} (-1)^{m+J-n} 2^{\frac{\lambda+m+J-n}{2}} \cdot \sum_r C_{rn}^{\delta, J, M} 2^{-r} (\cos 3\gamma)^{m+J-n-2r}$ $C_{rn}^{\delta, J, M} = \frac{3^n \lambda! (-1)^r 2^r (2m+2J-2r)! (3r)!}{2^{m+n} (2\lambda+1)! r! (m+J-r)! (m+J-n-2r)!} \cdot \sum_s (-1)^s \binom{\phi}{s} \binom{J+s}{s} 4^s \frac{(2\lambda+1-2s)!}{(3r-J+n-s)! (\lambda-s)!}$ $G_K^{n, L}(\gamma) = (-\sqrt{2})^n \sum_{K_0} (L-2n, 2n, L K_0 K-K_0, K) \cdot S_{K_0}^{L-2n}(\gamma) S_{K-K_0}^{2n}(-2\gamma)$ $S_K^{2m}(\gamma) = \left[\frac{(2m+K)! (2m-K)!}{(4m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\ell=0}^m \binom{m}{2\ell-\frac{K}{2}} \binom{2\ell-\frac{K}{2}}{\ell} (\sqrt{6})^m \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^{2\ell-\frac{K}{2}} \cdot (\cos \gamma)^{m-2\ell-\frac{K}{2}} (\sin \gamma)^{2\ell-\frac{K}{2}}$ $\frac{L}{2} \leq \lambda - 3m \leq L$ $0 \leq n \leq \frac{L}{2}$ $0 \leq r \leq \left(\frac{m+J-n}{2} \right)$ $0 \leq s \leq \phi$	$\phi_K^{\bar{\lambda}, m, \bar{L}}(\gamma) = \sum_n G_K^{n, \bar{L}}(\gamma) \bar{f}_n^{\delta, J, M}(\cos 3\gamma)$ $\bar{L} = L + 3, \quad \bar{\lambda} = \lambda + 3$ $\phi = L + 3m - \lambda, \quad J = \lambda - 3m - \frac{L}{2}$ $\bar{f}_n^{\delta, J, M}(\cos 3\gamma) = \pi^{-\frac{5}{4}} (-1)^{m+J-n} 2^{\frac{\bar{\lambda}+m+J-n}{2}} \cdot \sum_r \bar{C}_{rn}^{\delta, J, M} 2^{-r} (\cos 3\gamma)^{m+J-n-2r}$ $\bar{C}_{rn}^{\delta, J, M} = \frac{3^n (\lambda+3)! (-1)^r 2^r (2m+2J+1-2r)! (3r)!}{2^{m+n} (2\lambda+7)! r! (m+J-r)! (m+J-n-2r)!} \cdot \sum_s (-1)^s \binom{\phi}{s} \binom{J+s}{s} 4^s \frac{(2\lambda+7-2s)!}{(3r-J+n-s)! (\lambda+3-s)!}$ $G_K^{n, \bar{L}}(\gamma) = \sum_{K, K_2} (L, 3, \bar{L} K, K_2, \bar{K}) G_K^{n, L}(\gamma) g_{K_2}^{(3)}(\gamma)$ $g_{K_2}^{(3)}(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 3\gamma (\delta_{K_2, 2} - \delta_{K_2, -2})$ $\frac{(\bar{L}-3)}{2} \leq (\bar{\lambda}-3) - 3m \leq (\bar{L}-3)$ $0 \leq n \leq \frac{\bar{L}}{2}$ $0 \leq r \leq \left(\frac{m+J-n}{2} \right)$ $0 \leq s \leq \phi$

Damit ist eine Übersicht gegeben, wie die Wellenfunktionen des 5-dimensionalen harmonischen Oszillators konstruiert werden. Es gibt noch zwei weitere Möglichkeiten (20,21). Da aber nur die oben beschriebene Methode bei meiner Arbeit benutzt wurde, gehe ich darauf nicht näher ein.

(B) Matrixelemente des Hamiltonoperators

(a) Potenzieller Anteil

Wie in Kapitel (I) Gleichung (I.17) beschrieben wurde, hat das Potential die Form

$$V(\beta, \cos 3\gamma) = \sum_{\lambda, \mu} V_{\lambda, \mu} \beta^{\lambda} (\cos 3\gamma)^{\mu}. \quad (\text{II.114})$$

Das Problem besteht also darin, die Matrixelemente von $\beta^{\lambda} (\cos 3\gamma)^{\mu}$ zu bestimmen. Da die Basiswellenfunktionen in einen β - und γ -abhängigen Anteil separieren, kann auch das Matrixelement in einen Radial (β)- und Winkel (γ)-Anteil aufgeteilt werden. Das Integral über die Eulerwinkel ist einfach, da der (γ)-Anteil in (II.49) nur aus D-Funktionen besteht. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle \nu'' \lambda'' \mu'' L'' M'' | \beta^{\lambda} (\cos 3\gamma)^{\mu} | \nu \lambda \mu L M \rangle = \\ = \left(\int_0^{\infty} F_{n''}^{\lambda''}(\beta) \beta^{\lambda} F_n^{\lambda}(\beta) \beta^{\lambda} d\beta \right) 8\pi^2 (-1)^{L'+M'} \begin{pmatrix} 0 & L' & L' \\ 0 & M' & -M' \end{pmatrix} \cdot \\ \cdot \left(\int_0^{\pi} \sum_{\kappa', \kappa''} \begin{pmatrix} 0 & L' & L' \\ 0 & \kappa' & \kappa'' \end{pmatrix} (\cos 3\gamma)^{\mu} \phi_{\kappa'}^{\lambda' \mu' L'}(\gamma) \phi_{\kappa''}^{\lambda'' \mu'' L''}(\gamma) \sin 3\gamma d\gamma \right) N^{\lambda' \mu' L'} N^{\lambda'' \mu'' L''} \end{aligned} \quad (\text{II.115})$$

$N^{\lambda' \mu' L'}$ und $N^{\lambda'' \mu'' L''}$ sind Normierungskonstanten der Wellenfunktion.

(α) Radialanteil

Das radiale Matrixelement ist recht einfach zu lösen, denn wird $F_n^{\lambda}(\beta)$ in (II.115) eingesetzt, so erhält man:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} F_{n''}^{\lambda''}(\beta) \beta^{\lambda} F_n^{\lambda}(\beta) \beta^{\lambda} d\beta = \left[\frac{2(n''!)}{\Gamma(n'' + \lambda'' + \frac{5}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2(n!)}{\Gamma(n + \lambda + \frac{5}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{c_2}{\hbar \omega_2} \right)^{\frac{5}{2} + \frac{\lambda' + \lambda''}{2}} \\ \cdot \int_0^{\infty} L_{n''}^{\lambda'' + \frac{3}{2}} \left(\left(\frac{c_2}{\hbar \omega_2} \right) \beta^2 \right) \beta^{\lambda' + \lambda'' + 4} L_{n'}^{\lambda' + \frac{3}{2}} \left(\left(\frac{c_2}{\hbar \omega_2} \right) \beta^2 \right) e^{-\frac{1}{2} \frac{c_2}{\hbar \omega_2} \beta^2} d\beta \end{aligned} \quad (\text{II.116})$$

Das Integral über die Laguerrepolynome ist leicht zu lösen und ist in Anhang (F) beschrieben. Ich gebe hier nur die

Lösung an:

$$\int_0^\infty F_{n''}^{\lambda''}(\beta) \beta^8 F_{n'}^{\lambda'}(\beta) \beta^4 d\beta = \left(\frac{\hbar \omega_2}{c_2} \right)^{\frac{9}{2}} \left[\frac{n''!}{\Gamma(n'' + \lambda'' + \frac{5}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{n'!}{\Gamma(n' + \lambda' + \frac{5}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}(5 + \lambda' + \lambda'' + 5)\right) (-1)^{n' + n''} \sum_0 (-1)^6 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(5 + \lambda'' - \lambda') \\ \ell' - 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(5 + \lambda' - \lambda'') \\ \ell'' - 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(5 + \lambda' + \lambda'' + 5) \\ 6 \end{pmatrix} \quad (\text{II.117})$$

Dabei wird die folgende Regel für negatives x in $\begin{pmatrix} x \\ m \end{pmatrix}$ benutzt: $\begin{pmatrix} x \\ m \end{pmatrix} = (-1)^m \begin{pmatrix} -x + m - 1 \\ m \end{pmatrix} \quad x < 0$

(β) Winkelanteil

Bevor die Methode zur Berechnung der Matrixelemente angegeben wird, sei noch einmal auf die grosse Ähnlichkeit der Gruppe $O(5)$ mit $O(3)$ hingewiesen.

Beim 3-dim. harm. Oszillators sind die Basisfunktionen zur irreduziblen Darstellung mit Drehimpuls L die sphärischen Kugelflächenfunktionen $Y_{Lm}(\vartheta, \varphi)$. Die dort auftretenden Matrixelemente sind

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{L'm'}(\vartheta, \varphi) Y_{Lm}(\vartheta, \varphi) Y_{L''m''}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ = \sqrt{\frac{(2L'+1)(2L+1)(2L''+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} L' & L & L'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & L & L'' \\ m' & m & -m'' \end{pmatrix} \quad (\text{II.118})$$

Die 3j-Symbole spiegeln die Auswahlregeln für den Drehimpuls und der magnetischen Quantenzahl wider. Die Drehimpulse müssen der Dreiecksrelation genügen, d.h.

$$|L'' - L'| \leq L \leq L'' + L' \quad (\text{II.119})$$

Beachtet man noch die Symmetrieeigenschaften der 3j-Symbole, nämlich (10, 11)

$$\begin{pmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{L_1 + L_2 + L_3} \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix}$$

dann folgt aus $\begin{pmatrix} L' & L & L'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dass $L + L' + L'' = L + \Delta L + 2L'$ mit $\Delta L = L'' - L'$

sein muss, oder anders ausgedrückt:

$$L = \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix} \longleftrightarrow \Delta L = \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix} \quad (\text{II.120})$$

All diese Eigenschaften treten auch im Falle der Gruppe $O(5)$ bzgl. λ auf. Dort liegt statt des Integrals (II.118) das folgende vor

$$\int_0^\pi \sum_{K K' K''} \begin{pmatrix} L & L' & L'' \\ K & K' & K'' \end{pmatrix} \phi_{K'}^{\lambda' m' L'}(\gamma) \phi_K^{\lambda m L}(\gamma) \phi_{K''}^{\lambda'' m'' L''}(\gamma) \sin 3\gamma d\gamma =$$

$$=: (\lambda' m' L'; \lambda m L; \lambda'' m'' L'') \quad (\text{II.121})$$

(II.121) wird, wie es in Ref.(20) vorgeschlagen wurde, als Reduziertes-Wigner-Symbol (RWS) bezeichnet. Die Seniorität kann auf Grund der grossen Ähnlichkeit zwischen $O(3)$ und $O(5)$ als "Drehimpuls" der Gruppe $O(5)$ bezeichnet werden. Alle Eigenschaften von L bzgl. $O(3)$ kann auf λ bzgl. $O(5)$ übertragen werden! D.h.:

$$|\lambda' - \lambda| \leq \lambda'' \leq \lambda' + \lambda \quad (\text{II.122a})$$

und

$$\lambda = \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix} \longleftrightarrow \Delta \lambda = \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix} \quad (\text{II.122b})$$

Im Falle des Winkelanteils tritt statt $\phi_K^{\lambda m L}(\gamma)$ ein anderer Ausdruck auf, nämlich $(\cos 3\gamma)$. Da aber $\phi_0^{\lambda m L}(\gamma) = P_m(\cos 3\gamma)$ gilt, kann $(\cos 3\gamma)^m$ durch einfache Umkehrung aus den Polynomen $P_{\tilde{n}}(\cos 3)$ ($\tilde{n}=0,1,\dots$) konstruiert werden. Dabei gilt

$$m = \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix} \longleftrightarrow \tilde{n} = \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix} \quad (\text{II.123})$$

Aus diesen Gründen gelten die gleichen Auswahlregeln für

$(\cos 3\gamma)$ wie bei $\phi_0^{3m0}(\gamma)$! Diese Auswahlregeln und die für die Phononenzahl ν sind in Tabelle II.7 zusammengefasst. Dazu sei noch vermerkt, dass $n = \frac{\nu - \lambda}{2}$ eine ganze Zahl sein muss, d.h.

$$\nu = \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix} \longleftrightarrow \lambda = \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix} \quad (\text{II.124})$$

Man könnte jetzt in das Integral (II.118) den analytischen Ausdruck für $\phi_k^{\lambda m \lambda}(\gamma)$ einsetzen. Der daraus resultierende Anteil ist allerdings zu umständlich (7), sodass ein numerisches Verfahren verwendet wurde: Die Wellenfunktion $\phi_k^{\lambda m \lambda}(\gamma)$ wurden im Integrationsintervall $[0, \pi]$ an fest vorgegebenen Punkten berechnet und in einem zweiten Schritt numerisch nach der Gauss-Methode integriert.

Tabelle II.7

$$|\lambda' - \lambda| \leq \lambda'' \leq \lambda' + \lambda \Rightarrow \Delta\lambda \leq \lambda$$

$$\lambda = \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix} \Leftrightarrow \Delta\lambda = \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix} \Leftrightarrow \Delta\nu = \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix}$$

$$\Delta\lambda \leq 8: \frac{1}{2}(8 + \Delta\lambda) = \text{ganzzahlig} \Rightarrow \Delta\nu \leq 8$$

$$\frac{1}{2}(8 + \Delta\lambda) = \text{halbzahlig} \Rightarrow \Delta\nu = \text{beliebig}$$

$$\Delta\lambda > 8: \Delta\nu = \text{beliebig}$$

Für $L=0$ gilt speziell

$$\Delta\lambda \leq 3/m$$

$$m = \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix} \Leftrightarrow \Delta\lambda = \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix} \Leftrightarrow \Delta\nu = \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix}$$

(b) Kinetischer Anteil

Die nötigen Matrixelemente sind in Tabelle (II.8) angegeben. Dazu wurde die Gradientenformel für die Gruppe $O(5)$ verwendet (7.22)

$$\pi_{2m}^* |\nu \lambda \mu L M\rangle = -i \frac{C_2}{\omega_2} \sum_{\nu' \lambda' \mu' L' M'} |\nu' \lambda' \mu' L' M'\rangle \frac{\langle \nu' \lambda' \mu' L' M' | \alpha_{2m} | \nu \lambda \mu L M \rangle}{(\nu' - \nu)} \quad (\text{II.125})$$

Diese Formel wird abgeleitet unter Benutzung der Kommutationsrelation

$$[\pi_{2m}^*, H_5] = i \hbar C_2 \alpha_{2m}, \quad (\text{II.126})$$

die Matrixelemente von (II.126) berechnet werden und

$$H_5 |\nu \lambda \mu L M\rangle = \hbar \omega_2 \left(\nu + \frac{5}{2}\right) |\nu \lambda \mu L M\rangle \quad (\text{II.127})$$

benutzt wird. Näheres ist in meiner Diplomarbeit (8) zu finden

Tabelle II.8

Matrixelemente von Polynomen in π_{2m}^+ :

$$\pi_{2m}^+ |\nu \lambda \mu L M\rangle = -i \frac{C_2}{\omega_2} \sum_{\substack{\nu' \lambda' \mu' \\ L' M'}} |\nu' \lambda' \mu' L' M'\rangle \frac{\langle \nu' \lambda' \mu' L' M' | \alpha_{2m} | \nu \lambda \mu L M \rangle}{(\nu' - \nu)}$$

$$\begin{aligned} \langle \nu' \lambda' \mu' L' M' | P_{\bar{\nu}}(\pi^{[2]}) | \nu \lambda \mu L M \rangle &= \\ &= (-1)^{\frac{\Delta \nu}{2}} (-1)^{\bar{\nu}} \left(\frac{C_2}{\omega_2} \right)^{\bar{\nu}} \langle \nu' \lambda' \mu' L' M' | P(\alpha^{[2]}) | \nu \lambda \mu L M \rangle \end{aligned}$$

mit $\Delta \nu = \nu' - \nu$ und $P_{\bar{\nu}}$ = Polynom, homogen vom Grade $\bar{\nu}$.

Matrixelemente der verwendeten kinetischen Energie

$$\begin{aligned} \langle \nu' \lambda' \mu' L M | \frac{1}{3} \{ [\pi^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \pi^{[2]} \}^{[0]}_0 | \nu \lambda \mu L M \rangle &= \\ = \left(\frac{C_2}{\omega_2} \right)^2 \langle \nu' \lambda' \mu' L M | [[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]}_0 | \nu \lambda \mu L M \rangle &\begin{cases} -1 & ; \Delta \nu = \pm 3 \\ \frac{1}{3} & ; \Delta \nu = \pm 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \nu' \lambda' \mu' L M | \frac{1}{6} \{ [\pi^{[2]} \times \pi^{[2]}]^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]}_0 \} | \nu \lambda \mu L M \rangle &= \\ = \left(\frac{C_2}{\omega_2} \right)^2 \langle \nu' \lambda' \mu' L M | [[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]}]^{[0]}_0 | \nu \lambda \mu L M \rangle &\cdot \begin{cases} -1 & ; \Delta \nu = \pm 4 \\ 0 & ; \Delta \nu = \pm 2 \\ \frac{1}{3} & ; \Delta \nu = 0 \end{cases} \quad (l = 0, 2, 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \nu' \lambda' \mu' L M | [\pi^{[2]} \times \pi^{[2]}]^{[0]}_0 | \nu \lambda \mu L M \rangle &= \\ = (-1)^{\frac{\Delta \nu}{2}} \left(\frac{C_2}{\omega_2} \right)^2 \langle \nu' \lambda' \mu' L M | [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]}_0 | \nu \lambda \mu L M \rangle & \\ (\Delta \nu = \nu' - \nu) & \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, wie die Wellenfunktionen des 5-dim. harm. Oszillators und die Matricelemente des kollektiven Hamiltonoperators aussehen. In dieser Basis wird die Matrix des Hamiltonoperators berechnet und anschliessend diagonalisiert. Wenn die Basis gross genug gewählt wird, ist das numerische Problem des Modells gelöst. Und genau darin liegt die Schwierigkeit: Wie in Fig II.6 gezeigt ist, hängt die Rechenzeit empfindlich von der maximalen Phononenzahl ab.

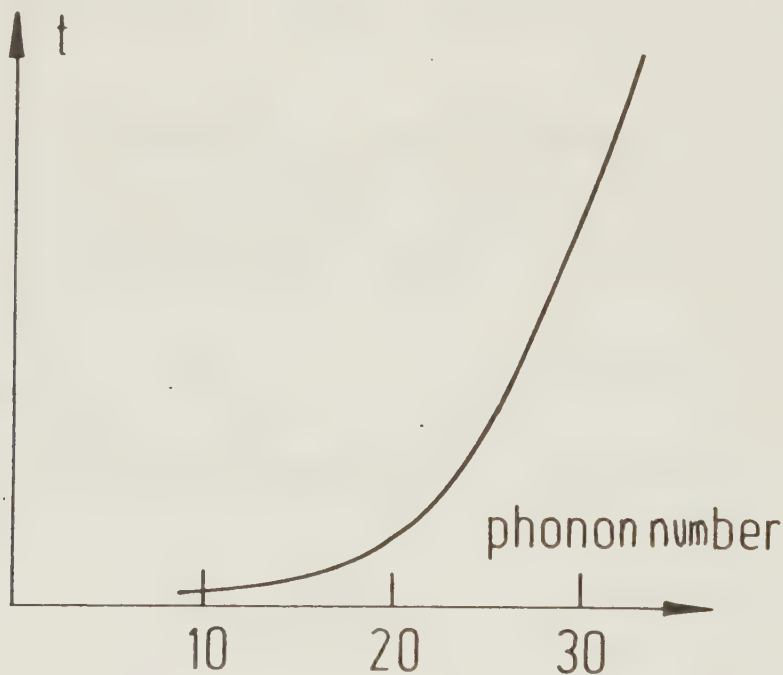


Fig. II.6

Da aber die Absicht besteht ein numerisches Anpassungsverfahren zu verwenden, mit dem die Parameter des Modells bestimmt werden, muss die Rechenzeit möglichst weit heruntergedrückt werden. Gute Konvergenz ist allerdings manchmal nur bei 30 Phononen zu erreichen. Sehr oft genügen 20 Phononen, mit einer Ungenauigkeit von bis zu 50keV bei 1-2 MEV, aber beim Anpassungsverfahren genügt diese Genauig-

(C) Neue Basis

(1) Vorstellen der neuen Basis

Die neue Basis muss ein realistischeres Potential besitzen als der harmonische Oszillator, d.h. sie muss ein Minimum bei $\beta \neq 0$ besitzen. Natürlich soll der harmonische Oszillator als Grenzfall enthalten und die Schrödingergleichung $H\Psi = E\Psi$ analytisch lösbar sein. Der Hamiltonoperator, der dies vollbringt, ist der folgende:

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2B_2} \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\hbar^2}{B_2} \frac{\hat{\Lambda}^2}{2\beta^2} + \frac{C-2}{2\beta^2} + \frac{C_2}{2} \beta^2 \quad (\text{II.131})$$

Dies ist gerade der harmonische Oszillator plus einem Zentrifugalterm proportional zu $\frac{1}{\beta^2}$. (II.132) wird umgeschrieben zu

$$H_0 = \frac{\hbar^2}{B_2} \left[-\frac{1}{2\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\hat{\Lambda}^2}{2\beta^2} + \frac{t^4}{2\beta^2} + \frac{s^4}{2} \beta^2 \right] \quad (\text{II.132})$$

mit $s = \left[\frac{C_2 B_2}{\hbar^2} \right]^{\frac{1}{4}}$, $t = \left[\frac{C-2}{\hbar^2} B_2 \right]^{\frac{1}{4}}$

Das Basispotential ist in Fig.II.7 veranschaulicht und hat ein Minimum bei

$$\beta_0 = \frac{t}{s} \quad (\text{II.133})$$

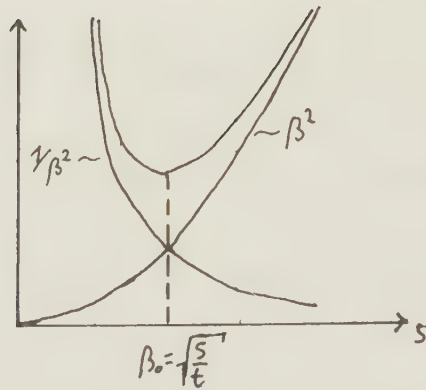


Fig II.7

s und t sind die Parameter der Basis, wobei im Falle des harmonischen Oszillators $t=0$ gesetzt wird.

Dieses Problem ist einfach zu lösen. Da das Potential keinen χ -abhängigen Anteil hat, ist der χ -Anteil der Wellenfunktion der gleiche wie beim harmonischen Oszillator, d.h. die Wellenfunktion hat noch gute Seniorität. Die Lösung für den β -abhängigen Anteil ist leicht zu erhalten (siehe Anhang (G)), wenn die Terme $\frac{\hat{\Lambda}^2}{2\beta^2}, \frac{t^4}{2\beta^2}$ zusammengefasst werden zu

$$\frac{\hat{\Lambda}'^2}{2\beta^2} = \frac{\hat{\Lambda}^2}{2\beta^2} + \frac{t^4}{2\beta^2} \quad (\text{II.134})$$

Da die Wellenfunktionen nach wie vor gute Seniorität besitzen, sind die Eigenwerte von $\hat{\Lambda}'^2$:

$$\delta(\delta+3) = \lambda(\lambda+3) + t^4$$

$$\text{oder} \quad \delta = \sqrt{(\lambda+1.5)^2 + t^4} - 1.5 \quad (\text{II.135})$$

In den alten Wellenfunktionen wird im β -abhängigen Anteil überall λ durch δ ersetzt!

$$F_n^\delta(\beta) = \left[\frac{2(n!)}{\Gamma(n+\delta+\frac{5}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c_2}{\hbar\omega_2} \right)^{\frac{5}{4} + \frac{\delta}{2}} \beta^\delta L_n^{\delta+\frac{3}{2}} \left(\left(\frac{c_2}{\hbar\omega_2} \right) \beta^2 \right) e^{-\frac{1}{2} \frac{c_2}{\hbar\omega} \beta^2} \quad (\text{II.136})$$

Die Eigenfunktionen werden, mit Ausnahme der Phononenzahl, nach den gleichen Quantenzahlen λ, μ, L, M charakterisiert, wie im Falle des harmonischen Oszillators. Die neue Quantenzahl ist n und bedeutet

n = Anzahl der Knoten in β -Richtung

Für $t=0$ geht dies in die Anzahl der zu $L=0$ gekoppelten Phononenpaare über! Wie im Anhang (G) gezeigt wird, ist die Energie

$$L_{n\lambda} = \hbar\omega_2 \left(2n + \sqrt{(\lambda+1.5)^2 + t^4} + 1 \right) \quad (\text{II.137})$$

Für $t=0$ geht dies über in

$$E_{n\lambda} = \hbar\omega_2 \left(2n + \lambda + \frac{5}{2} \right) = \hbar\omega \left(\nu + \frac{5}{2} \right)$$

Wie zu sehen ist, hat der neue Basishamiltonoperator einige Vorteile

- (i) Das Problem ist analytisch lösbar
- (ii) Das Potential hat ein Minimum bei $\beta \neq 0$

(2) Eigenschaften der neuen Basis

(a) Energie

In Fig.II.8 sind die reduzierten Energien $\frac{E_{n\lambda} - E_{00}(\rho^2)}{\hbar\omega}$, welche unabhängig von s sind, gegenüber t aufgetragen. Für $t=0$ bekommen wir den Fall des harmonischen Oszillators und für $t \neq 0$ wechselt das Spektrum zu einem γ -instabilen Fall. Dabei teilt sich das Spektrum in Banden mit gemeinsamen n .

Jedoch kann mit dem Hamiltonoperator (siehe II.132) kein

		$\mu=0$	$\mu=1$	$\mu=2$
$l=6$	contains	$J=12, 10, 9, 8, 7, 6,$	$6, 4, 3,$	0
$l=5$		$J=10, 8, 7, 6, 5,$	$4, 2$	
$l=4$		$J=8, 6, 5, 4,$	2	
$l=3$		$J=6, 4, 3,$	0	
$l=2$		$J=4, 2$		
$l=1$		$J=2$		
$l=0$		$J=0$		

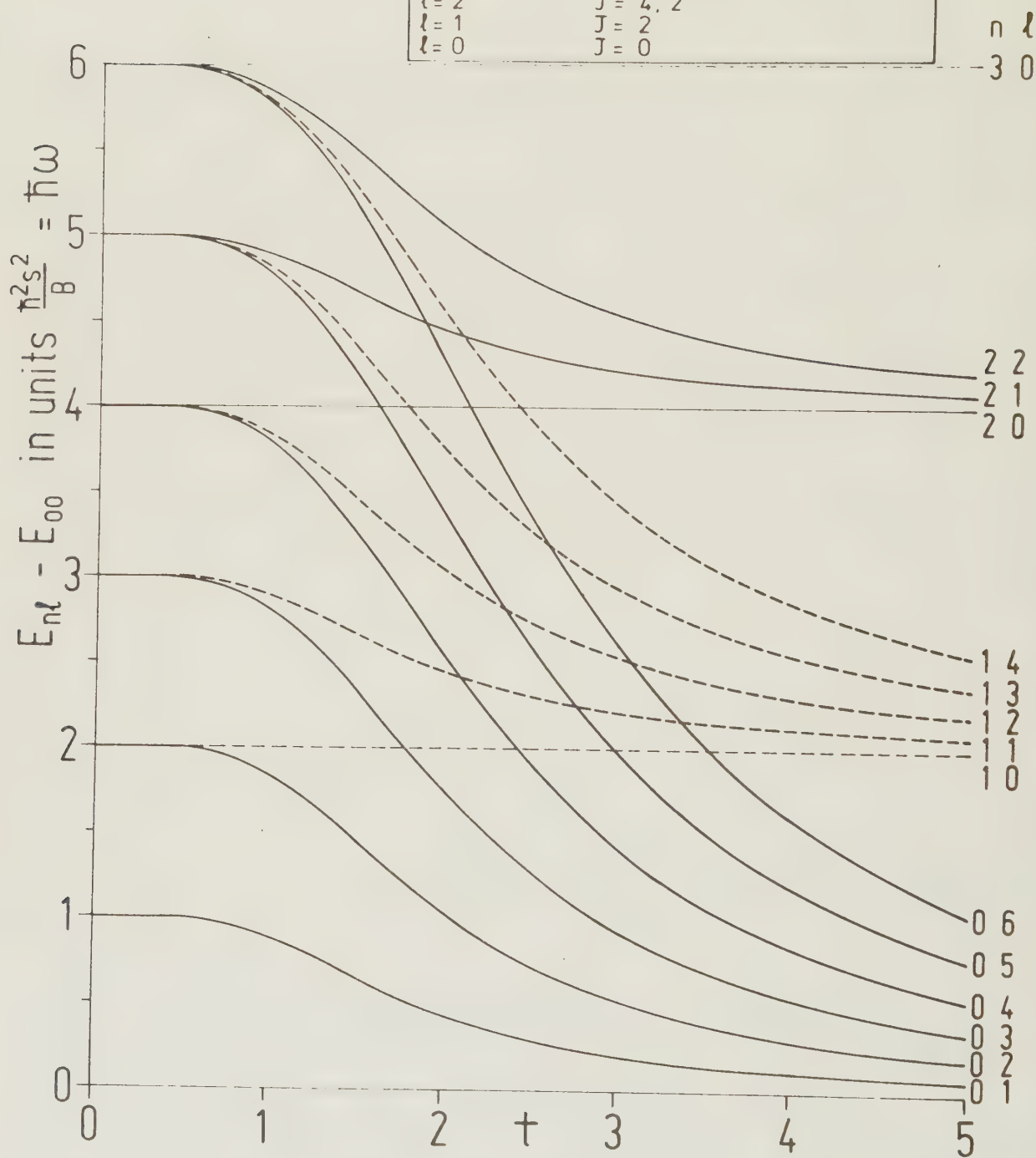


Fig II.8

χ -instabiler Kern beschrieben werden, da die tiefliegenden L-Zustände der Grundzustandsbande ($n=0$) nicht dem $L(L+1)$ -Gesetz folgen (23). Dies ist im folgenden illustriert:

Für den Fall, dass $t, s \gg 1$ ist, bekommen wir ein sehr steifes Potential in β -Richtung. Für die Zustände in der Grundzustandsbande ($n=0, \lambda = \frac{L}{2}$) gilt dann (siehe Anhang (H)):

$$E_{n\lambda} - E_{00} \xrightarrow[t \gg 1]{s \gg 1} \frac{\hbar^2}{2\theta_0} L(L+1) \quad (\text{II.138})$$

$$\text{mit } \theta_0 = 4B_2\beta_0^2, \beta_0 = \frac{t}{s}$$

E_{00} ist die Grundzustandsenergie. Wie zu sehen ist, ist dieses Ergebnis sehr ähnlich zum starren Rotator (1), nur dass die Zustände nicht dem $L(L+1)$ -Gesetz folgen.

(b) Wellenfunktionen

Wie die Wellenfunktionen sich ändern, wenn s und t variiert werden, ist in Fig (II.9) illustriert. Der erste Teil in Fig.II.9 zeigt einen Fall für $t=3$. Die Wellenfunktion ist um $\beta > 0$ konzentriert. Wenn s erhöht wird ($t=\text{fest}$), wird die Position des Wellenpaketes nach innen verschoben, was natürlich klar ist, da der Term $\frac{C_2}{2}\beta^2$ mit wachsendem β an Einfluss gewinnt. Der zweite Teil in Fig.II.9 zeigt den Fall, wo s festgehalten aber t variiert wird. Mit wachsendem t wird die Wellenfunktion nach aussen verschoben, ohne nahezu ihre Breite zu variieren. Schliesslich wird im dritten Teil von Fig.II.9 festgehalten, während s und t gleichzeitig um den gleichen Faktor verändert werden. Wie erwartet behält die Wellenfunktion ihre Position bei, während ihre Breite je nach Steifheit des Potentials verändert wird!

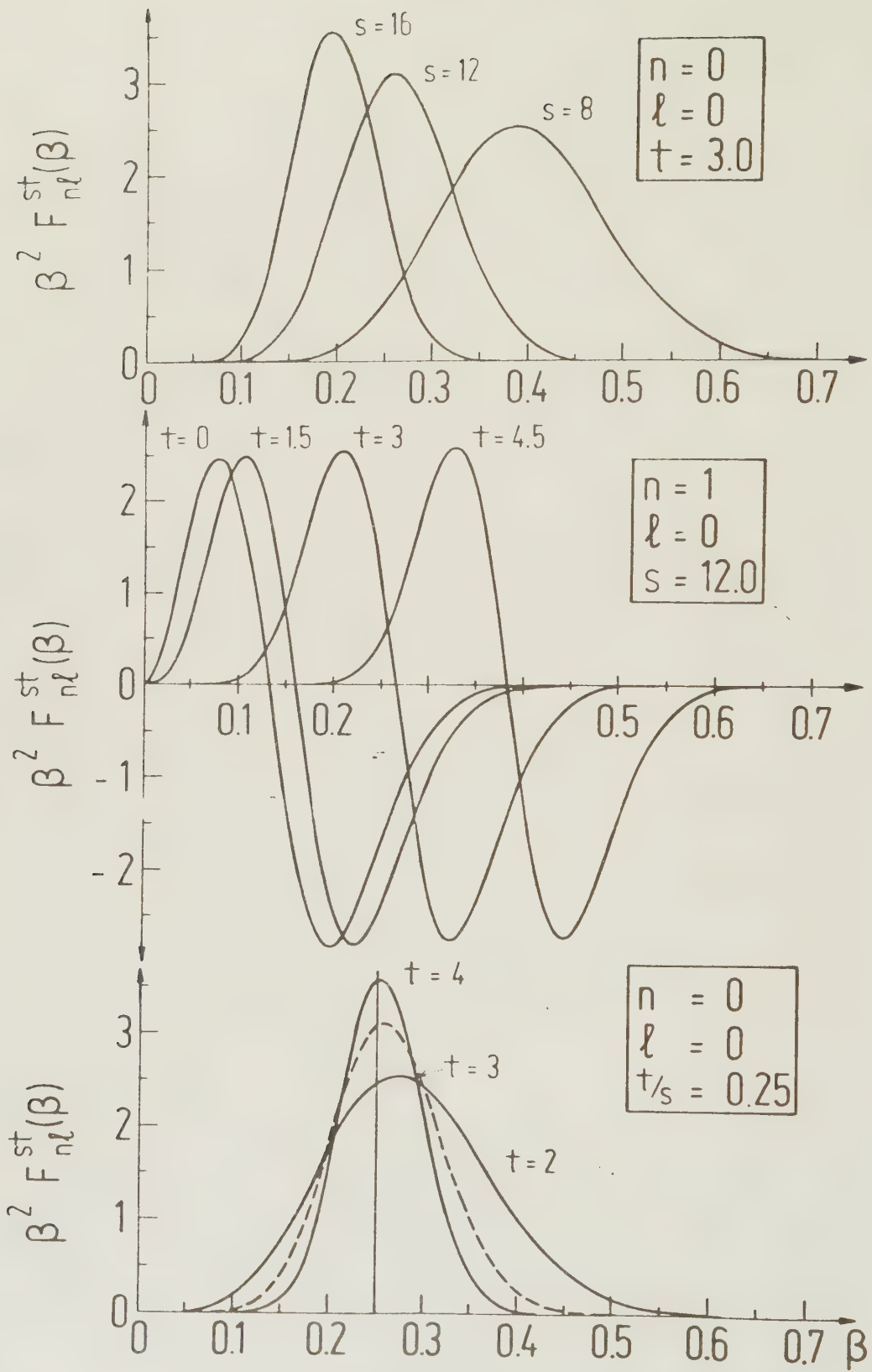


Fig. II.9

(3) Matrixelemente

(a) Potential

Im Anhang (G) sind die Matrixelemente der Terme β^S innerhalb dieser Basis angegeben. Es genügt hier nur den β -Anteil zu betrachten, da der γ -Anteil der gleiche ist wie im Falle des harmonischen Oszillators. Eine günstige Eigenschaft ist, dass die Abhängigkeit der Matrixelemente von s absepariert werden kann:

$$(F_{n'\lambda'}^{st} | \beta^S | F_{n\lambda}^{st}) = S^{-S} (F_{n'\lambda'}^{1t} | \beta^S | F_{n\lambda}^{1t}) \quad (\text{II.139a})$$

Die Lösung für $(F_{n'\lambda'}^{1t} | \beta^S | F_{n\lambda}^{1t})$ ist leicht zu berechnen:

$$(F_{n'\lambda'}^{1t} | \beta^S | F_{n\lambda}^{1t}) = \left[\frac{\hbar \omega_2}{C_2} \right]^{S/2} \left[\frac{n!}{\Gamma(n'+\delta'+\frac{S}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{n!}{\Gamma(n+\delta+\frac{S}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}(s+\delta+\delta'+5)\right) (-1)^{n'+n} \sum_{\delta} (-1)^{\delta} \left(\frac{1}{2}(s+\delta-\delta') \right) \left(\frac{1}{2}(s+\delta'-\delta) \right) \cdot \left(\frac{n'-\delta}{n-\delta} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2}(s+\delta+\delta'+5) \right) \quad (\text{II.139b})$$

(b) Kinetische Energie

Hier werden nur die Matrixelemente der Kinetischen Energie (siehe I.17) angegeben. Ihre Ableitung ist im Anhang (I) erklärt (Die Matrixelemente in den Doppelbalken geben die Matrixelemente zu $\hbar=B_2=C_2=1$ an):

$$\langle n'\lambda' | [\pi^{[2]} \times \pi^{[2]}]_0^{[0]} | n\lambda \rangle = \hbar \sqrt{C_2 B_2} \left[\left(1 - \frac{1}{2} (f_{n\lambda} - f_{n'\lambda'})^2 \right) \langle n'\lambda' | \beta^2 | n\lambda \rangle - t^4 \langle n'\lambda' | \frac{1}{\beta^2} | n\lambda \rangle \right] \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (\text{II.140a})$$

$$\langle n'\lambda' | \frac{1}{3} \{ [\pi^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \pi^{[2]} \}_0^{[0]} | n\lambda \rangle = -\sqrt{\frac{2}{35}} \left(\frac{\hbar^3 C_2}{\omega_2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} (f_{n\lambda} - f_{n'\lambda'})^2 \right) \langle n'\lambda' | \beta^3 | n\lambda \rangle - \frac{1}{2} t^4 \langle n'\lambda' | \beta | n\lambda \rangle \right] \cdot \langle n'\lambda' | L M | \cos 3\gamma | n\lambda \rangle \quad (\text{II.140b})$$

$$\begin{aligned}
& \langle n' \lambda' \dots | \frac{1}{6} \{ [\pi^{[2]} \times \pi^{[2]}]^{[0]} [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \} | n \lambda \dots \rangle = \\
& = \hbar^2 \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} (f_{n\lambda} - f_{n'\lambda'})^2 \right) \cdot \langle n' \lambda' \dots || \beta^4 || n \lambda \dots \rangle - \right. \\
& \quad \left. - \frac{t^4}{3} \delta_{n'n} \delta_{\lambda'\lambda} \right] \frac{1}{5} \quad , \text{ mit } f_{n\lambda} = 2n + \sqrt{(\lambda + 1.5)^2 + t^4} + 1
\end{aligned} \tag{II.140c}$$

Die Gradientenformel für dieses Problem ist:

$$\begin{aligned}
\pi_{2n}^* | n \lambda \dots \rangle &= \frac{i B_2}{\hbar} \sum_{n' \lambda'} | n' \lambda' \dots \rangle (E_{n\lambda} - E_{n' \lambda'}) \langle n' \lambda' \dots | x_{2n} | n \lambda \dots \rangle \tag{II.141} \\
\text{mit } E_{n\lambda} &= \hbar \omega_2 f_{n\lambda} \\
\omega_2 &= \sqrt{\frac{C_2}{B_2}}
\end{aligned}$$

(4) Ergebnisse von Testrechnungen

(a) Einführende Bemerkungen

Wir gehen mit dieser Basis genauso vor wie beim harmonischen Oszillator: Wir wandeln

$$H_0 \psi_{\alpha} = E_{\alpha} \psi_{\alpha} \tag{II.142}$$

(α = die restlichen Quantenzahlen)

in eine Matrixgleichung um und diagonalisieren H . Da wir nur eine endliche Basis nehmen können, kommt es sehr auf die Wahl der Basisparameter an, damit die Konvergenz gut wird. Dazu wurden folgende Überlegungen angestellt: Nehmen wir an, das optimale s und t lägen bereits vor. Wenn wir nur p_L Basiszustände zum Drehimpuls L mitnehmen, dann wählen wir die p_L niedrigsten. Der Grund dafür ist anschaulicher Art, dass nämlich die p_L niedrigsten Zustände am meisten zum Niederenergiespektrum beitragen. Um diese Überlegung zu verwirklichen, werden die Basiszustände nach der Formel

$$E_{n\lambda} = \hbar \omega_2 (2n + \sqrt{(\lambda + 1.5)^2 + t^4} + 1) \tag{II.143}$$

in der Energie sortiert und die p_L niedrigsten werden genommen. Für wachsendes t passiert dann, dass Zustände kreuzen und welche, die vorher eine Nummer $> p_L$ zugeordnet bekamen, liegen nun unter p_L . Jedoch stellt sich heraus, dass

diese Zustände i.a. immer noch nicht soviel beitragen wie die alten. D.h. Basisfunktionen, die immer noch einen grossen Anteil haben, liegen über p_L und werden nicht betrachtet. Aus diesem Grunde werden alle Rechnungen ohne Umordnung durchgeführt und die Zustände, die bei $t=0$ benutzt wurden, werden auch weiterhin verwendet!

In Tabelle II.9 ist die Anzahl der Basiszustände bei $t=0$ zu verschiedenem Drehimpuls und Phononenzahl $\nu=5,10,15,20,25$ angegeben. Für $t=0$ wird die gleiche Anzahl von Basiszuständen genommen!

Tabelle II.9

$N_0 \backslash \nu$	5	10	15	20	25	30
0	5	14	27	44	65	91
2	7	22	45	77	117	165
3	2	8	19	33	52	75
4	6	25	56	100	156	225
5	2	12	30	57	92	135
6	4	24	61	114	184	271
7	1	12	36	72	121	182
8	2	21	60	121	202	304
9	0	10	37	80	140	217
10	1	16	56	121	211	326

(b) Konvergenztests

Um die Konvergenz in der neuen Basis zu testen, wurden spezielle Beispiele ausgewählt, die auf den Gneuss-Greiner-Hamiltonoperator (5,8) beruhen, aber nur mit einem harmonischen Anteil in der kinetischen Energie (siehe I.12)

$$H_{GG} = \frac{\hbar^2}{B_2} \hat{T}^2 + \frac{C_2}{\sqrt{5}} \beta^2 - \sqrt{\frac{2}{35}} C_3 \beta^3 \cos 3\gamma + \frac{C_4}{5} \beta^4 - \sqrt{\frac{2}{175}} C_5 \beta^5 \cos 3\gamma + \left(\frac{2}{35}\right) C_6 \beta^6 (\cos 3\gamma)^2 + \frac{D_6}{5\sqrt{5}} \beta^6 \quad (\text{II.144})$$

$$\text{mit } \hat{T}^2 = -\frac{1}{2\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\hat{L}^2}{2\beta^2}$$

Dabei steht der Massenparameter B_2 zum entsprechenden B_{2s} im Gneuss-Greiner-Modell (5,9) in der folgenden Beziehung:

$$B_2 = \frac{B_{2s}}{\sqrt{5}} \cdot 2 \quad (\text{II.145})$$

Zum Test benutze ich vier verschiedene Arten von Potential-Energie-Flächen (PES):

- (i) Eine PES mit einem Minimum bei hohem
- (ii) Eine PES mit einem Minimum bei kleinem
- (iii) Eine PES mit zwei Minima bei verschiedener Deformation
- (iv) γ -instabile PES.

Die verwendeten PES sind in den Figuren (II.10, II.11, II.12, II.13) gezeigt. In Tabelle II.10 sind die Parameter von H_{66} für die vier Beispiele ($^{166}_{68}\text{Er}$, $^{126}_{54}\text{Xe}$, $^{142}_{62}\text{Sm}$ und $^{166}_{68}\text{Er}^*$) angegeben.

(∞) Ergebnisse der Konvergenzstudien

Zunächst wird das Beispiel $^{166}_{68}\text{Er}$ ausführlich behandelt. Die Energien von 0_1^+ , 0_2^+ und 0_3^+ werden in Abhängigkeit von s und t berechnet. Später, wo die besten Basisparameter ohne Diagonalisierung bestimmt werden, sind diese Ergebnisse wichtig, um die Effektivität der Methode zu illustrieren. Danach präsentiere ich Rechnungen, in der eine Anzahl von Zuständen benutzt wurden, um die mittlere Konvergenz zu testen. Dasselbe wurde mit einer Anzahl von BE2-Werten gemacht. Im Anschluss an das Beispiel ^{166}Er werden die restlichen Beispiele (^{126}Xe , ^{146}Sm und $^{166}\text{Er}^*$) ähnlich behandelt.

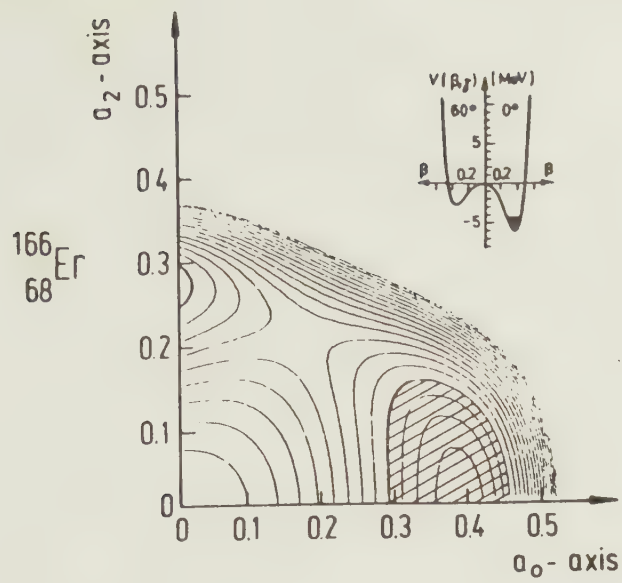


Fig. II.10

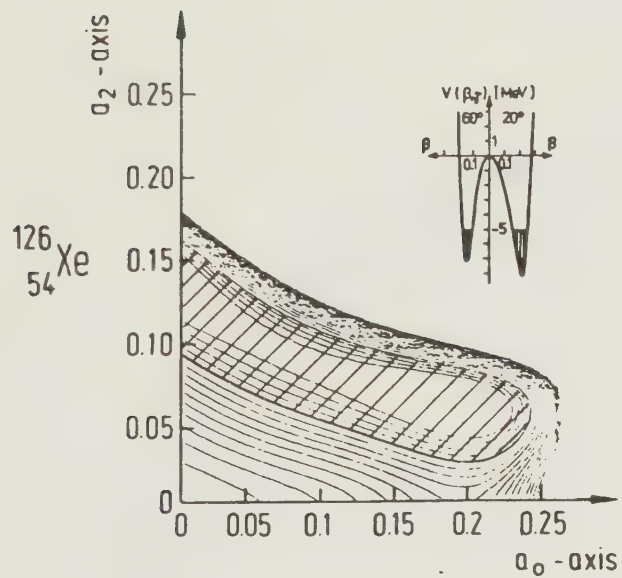


Fig. II.11

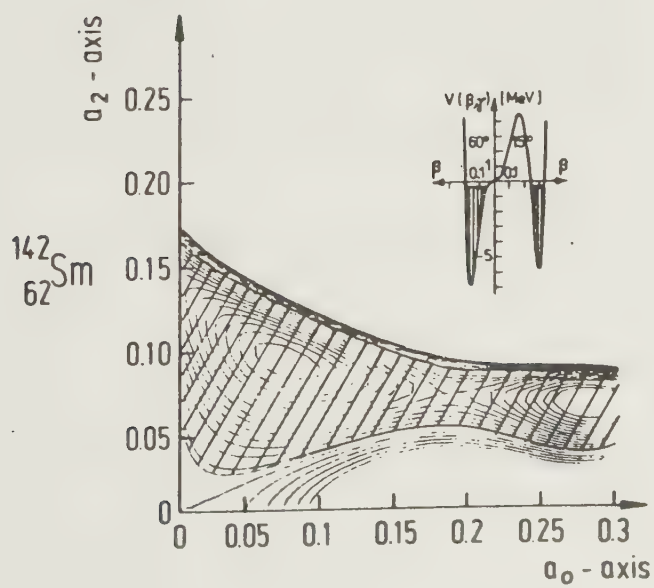


Fig. II.12

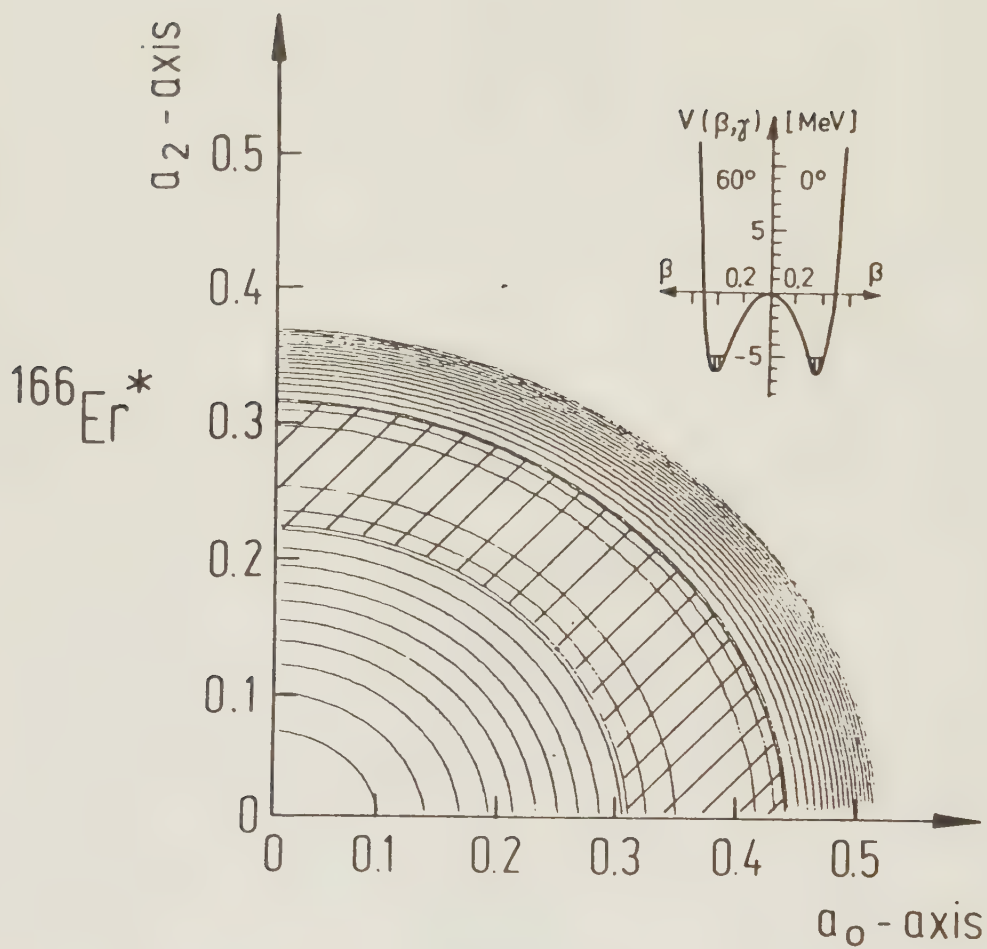


Fig 11.13

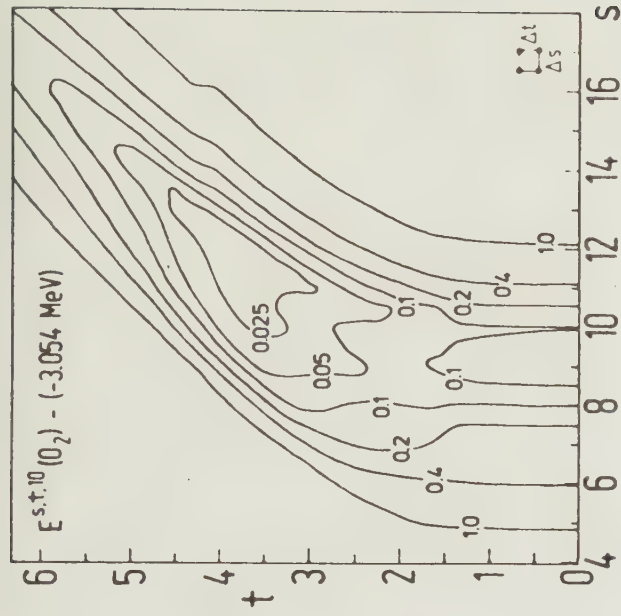
Tabelle II.10

	^{166}Er	^{126}Xe	^{142}Sm
$B_{25} = \sqrt[5]{\frac{B_2}{2}}$ ($10^{-42} \text{MeV/sec}^2$)	55.300	76.834	44.220
C_2 (MeV)	-94.890	-500.650	123.420
C_3 (MeV)	228.410	-8853.797	-18342.000
C_4 (MeV)	-549.860	-24988.000	-41775.000
C_5 (MeV)	-1323.590	555350.000	950730.000
C_6 (MeV)	3186.150	2075700.000	2674600.000
D_6 (MeV)	12744.540	1486600.000	1411200.000

(i) ^{166}Er (10)

Figur II.14 gibt die Energie der Zustände 0_1^+ , 0_2^+ und 0_3^+ in Abhängigkeit von s und t an. Dies ist eine 10-Phononenrechnung, was bedeutet, dass für alle t die gleiche Anzahl von Basiszuständen genommen wurde wie bei $t=0$ für 10 Phononen. Auch in Zukunft werde ich von maximaler Phononenzahl auch bei $t=0$ im oben genannten Sinn sprechen. Bei diesen Rechnungen wurden die Basiszustände nach der Energie sortiert! Die Höhenlinien geben die Abweichung von der 30-Phononen-Rechnung an, welche wir als 'exakt' bezeichnen. Wie man sieht, liegt das Minimum bei ca. $t=3.6$ und die Konvergenz ist dort um einen Faktor 10 besser als im Vergleich zu $t=0$.

Weiterhin ist eine besondere Eigenschaft in der Figur II.14 zu erkennen: Für kleine Werte von t verlaufen die Linien parallel zur t -Achse und für höhere Werte wandelt sich dies zu einem diagonalen Verhalten um. Zum Vergleich siehe Fig. II.9, wo die Abhängigkeit der Basis-Wellenfunktionen von s und t aufgezeichnet ist. Um eine gute Konvergenz zu erhalten, muss die Wellenfunktion auf die richtige Position geschoben werden. Dies ist für ein bestimmtes $\beta_0 = \text{konstant}$ der Fall, welches gerade das diagonale Verhalten ergibt, d.h. $t = \beta_0 s$. Jetzt reicht dies allerdings noch nicht für eine gute Konvergenz aus. Die Wellenfunktion muss noch die richtige Breite haben, die im Mittel der realen Wellenfunktion entsprechen soll. Diese Bedingung ist für ein ganz bestimmtes Variablenpaar (t, s) mit $\beta_0 = \frac{t}{s}$ erreicht (siehe Fig. II.9). In Fig. II.15 ist $E(0_1^+)$, $E(0_2^+)$ und $E(0_3^+)$ in Abhängigkeit von s bei festem $t=0$ und 3.6 für verschiedene maximale Phononenzahlen aufgetragen. Wie man auch hier sieht, ist die Konvergenz so stark verbessert, dass bei $t=3.6$ die 15-Phononen-Rechnung fast dieselbe Antwort liefert, wie mit 20-Phononen bei $t=0$. In dieser Figur ist



Errors in the calculated energies
of the first three $J=0$ states.
(10 $\hbar\omega$ expansion basis)

^{166}Er

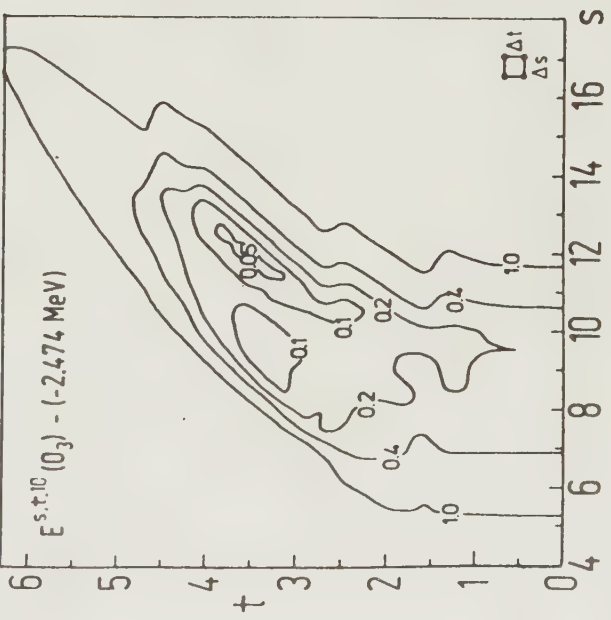
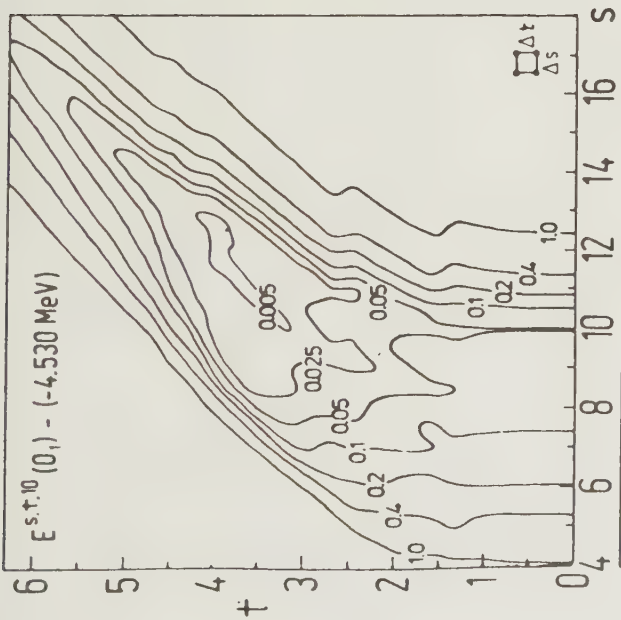


Fig. II.14

Calculated Energy in MeV

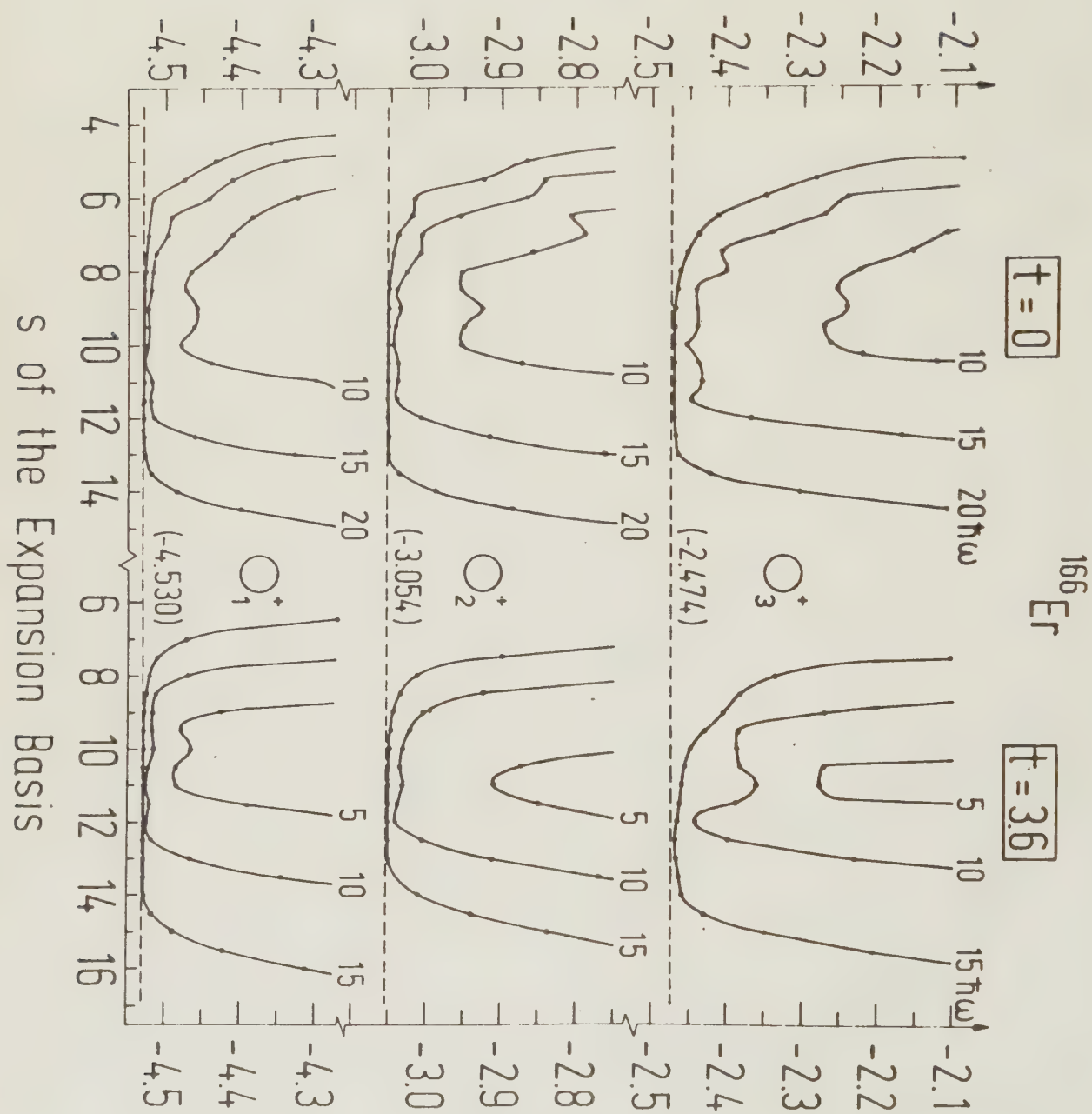


Fig. II.15

eine weitere Eigenschaft zu erkennen: Zu kleinem s hin steigt die berechnete Energie steil an, während zu grossem s hin das Verhalten flacher ist. Die Erklärung ist einfach, wenn auf die Matrixelemente geschaut wird. In Gleichung (II.139a) zeigte ich, dass die Matrixelemente von β^8 proportional zu s^{-8} verlaufen und wenn das Ergebnis von (II.140a) bezüglich von $[\pi^{[2]} \chi \pi^{[2]}]_0^{[0]}$ verwendet wird, gehen die Matrixelemente des harmonischen Anteils in der Energie proportional zu s^2 . Für $s \rightarrow 0$ dominiert der β^6 -Term und die Matrixelemente des Hamiltonoperators H_{∞} gehen somit proportional zu s^{-6} , was einem steilen Anstieg entspricht. Für $s \rightarrow \infty$ dominiert der $[\pi^{[2]} \chi \pi^{[2]}]_0^{[0]}$ -Term, der mit s^2 geht. Dies entspricht einem flachen Anstieg. Zwischen diesem Grenzverhalten haben die Zustände ein mehr oder weniger flaches Verhalten. In diesem Bereich liegt auch die beste Konvergenz vor. Jedoch sind die berechneten Energien stets grösser als die wahren, was einem verallgemeinertem Riz'schen ^{Theorem} entspricht. Der Beweis ist in Ref. (24) zu finden.

In Fig.II.16 ist eine 10-Phononenrechnung gezeigt, in der die Energie des 0_3^+ -Zustandes von ¹⁶⁶Er in Abhängigkeit von s aufgetragen ist. Eine Kurve ist mit und eine ohne Umordnung der Basiszustände nach den Energien berechnet. Wie zu sehen ist, ist die Rechnung ohne Umordnung flacher und besser als die mit. Die Begründung wurde bereits in der Einleitung dieses Abschnitts gegeben. Dieser Effekt wurde allerdings erst während den Rechnungen bemerkt und deshalb sind einige Ergebnisse mit Umordnung und einige ohne gemacht worden. Die wichtigen Eigenschaften der Basis bleiben davon im wesentlichen unberührt.

In Fig.II.17 wurden einige Zustände ausgesucht und die mittlere absolute Abweichung von der "exakten" (30 Phononen) Rechnung aufgetragen. Es stellte sich heraus, dass alle Zustände im Mittel die beste Konvergenz bei $t=3.8$

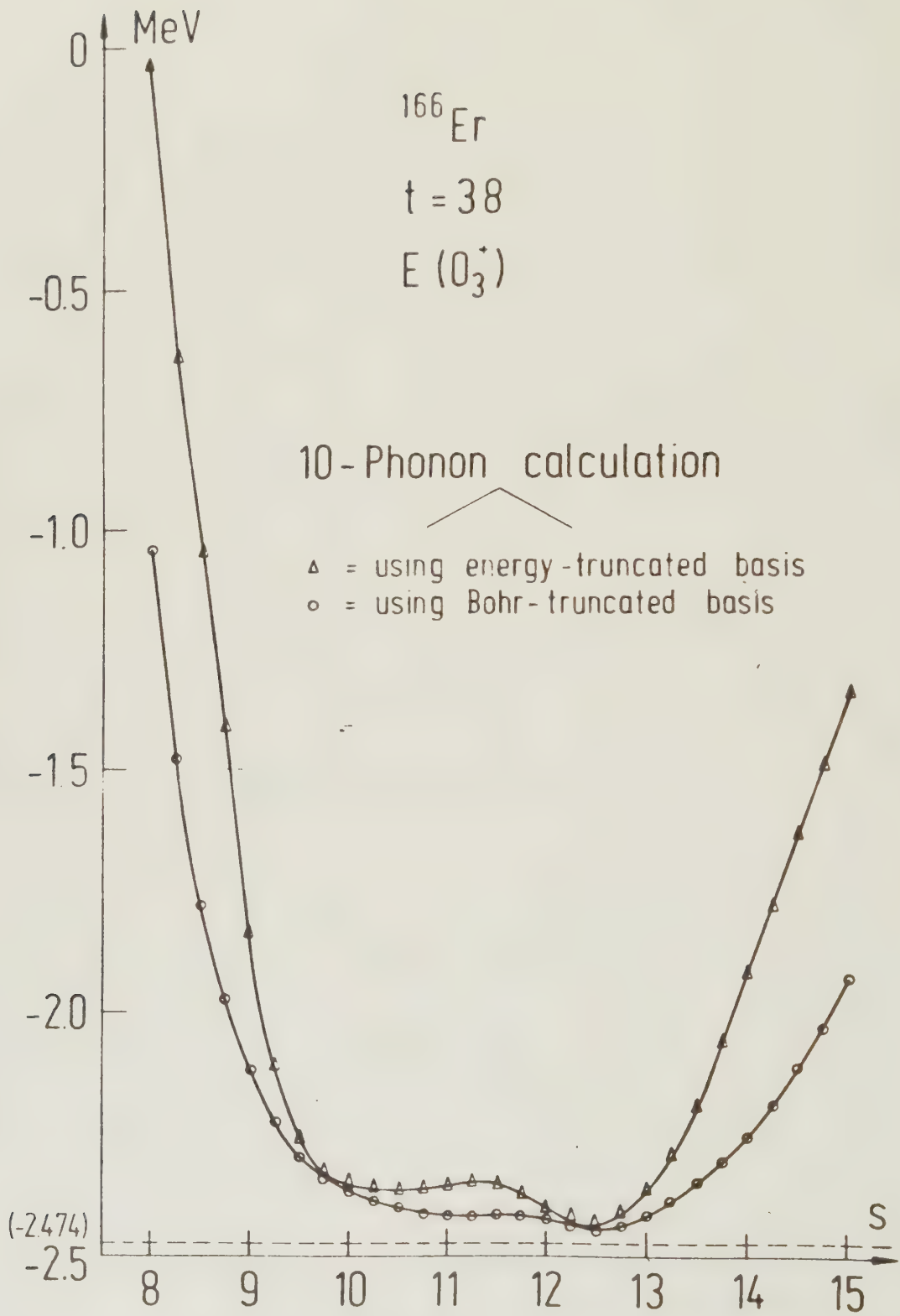


Fig. II.16

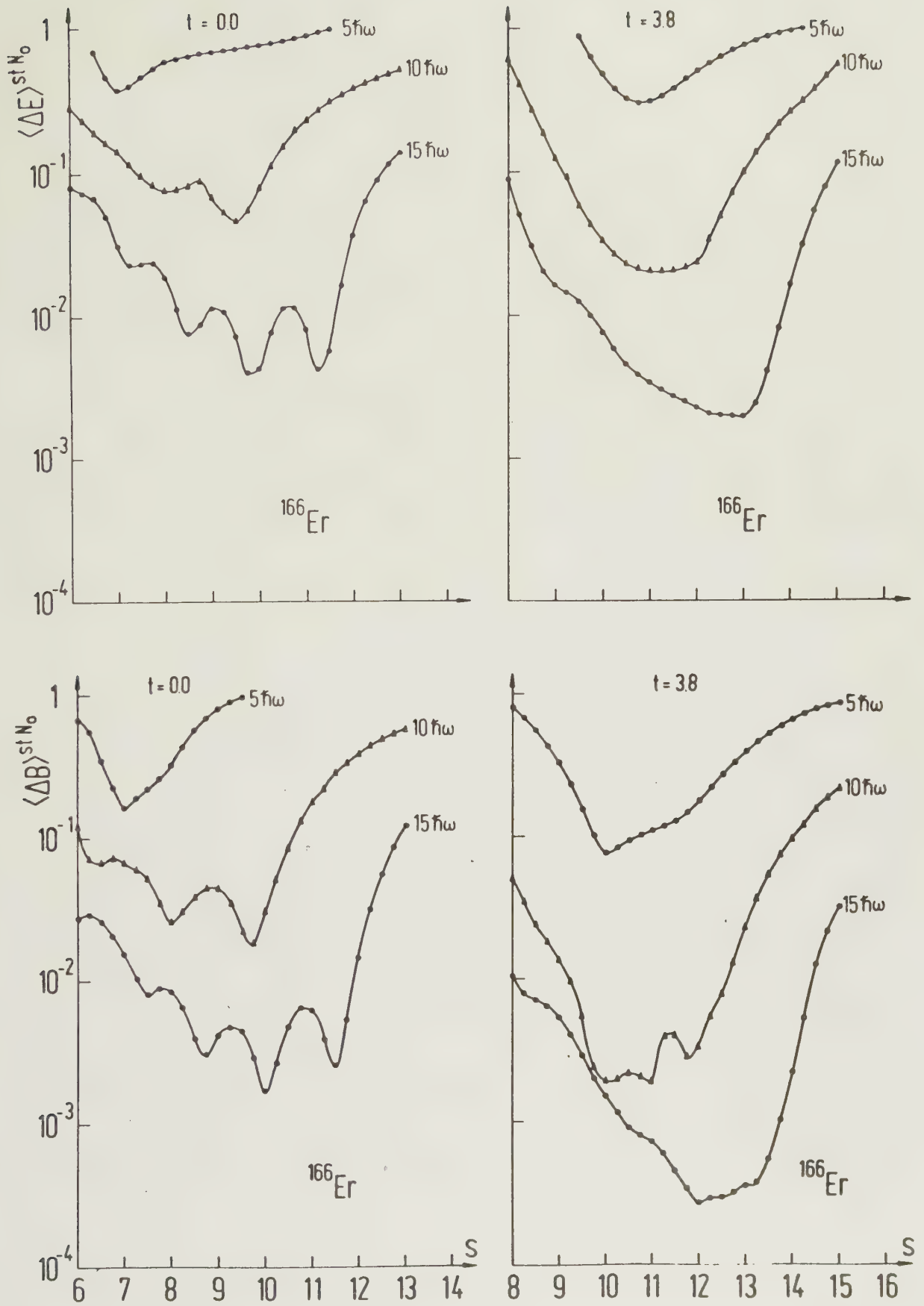


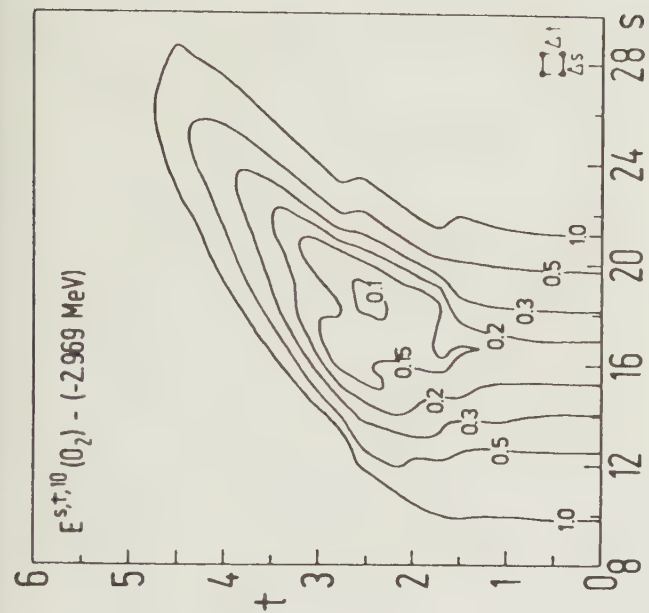
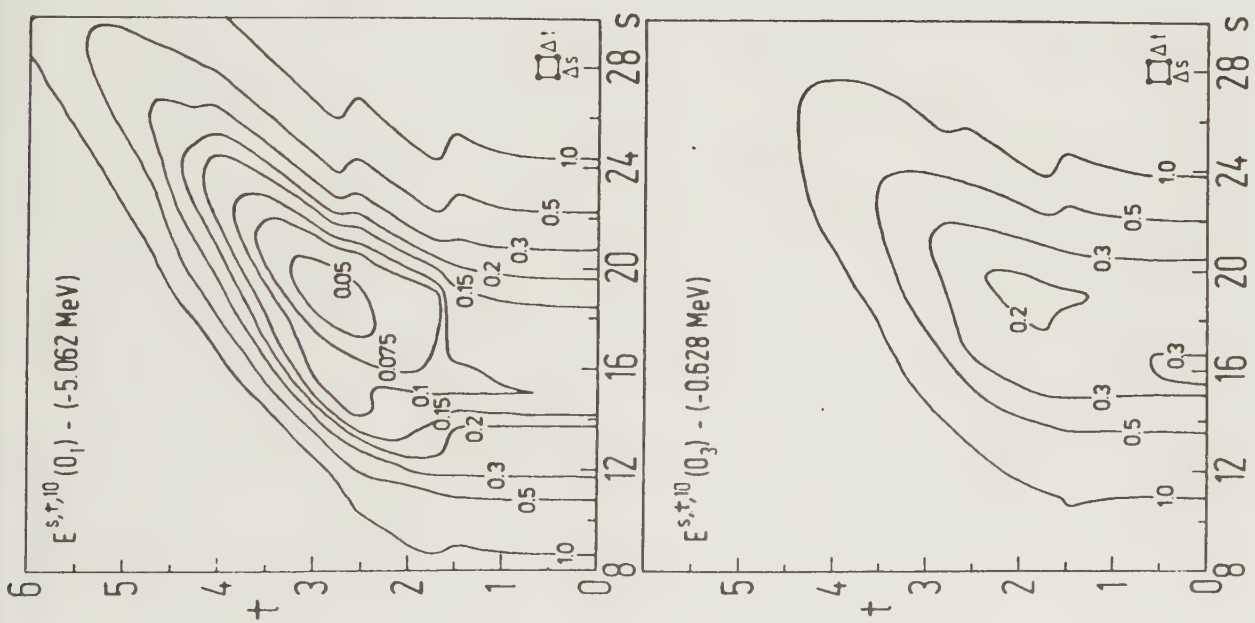
Fig. II.17

hatten (im Gegensatz zu Fig.II.15, wo nur die ersten drei 0^+ -Zustände genommen wurden). Diese Rechnung wurde ohne Umordnung durchgeführt! Auch hier ist zu erkennen, dass die Konvergenz bei $t=0$ beträchtlich verbessert wurde. Dies wird in allen Kernen der Fall sein, die ein Minimum in der PES bei sehr hoher Deformation haben, wie das Beispiel zeigt. Im zweiten Teil der Fig.II.17 wurden einige BE2-Werte und Quadrupolmomente ausgesucht und wie im ersten Teil von Fig.II.17 aufgetragen. Auch sind die gleichen Eigenschaften vorhanden, wobei die bessere Konvergenz noch deutlicher wird.

(ii) ^{126}Xe

Das nächste Beispiel ist eine PES mit einem Minimum bei kleinem β (siehe Fig.II.11). Deshalb ist es anzunehmen, dass die Ergebnisse nicht stark vom harmonischen Oszillator als Basis ($t=0$) abweichen. In Fig.II.18 sind die Energien von 0_1^+ , 0_2^+ und 0_3^+ in Abhängigkeit von s und t aufgetragen. Diese Rechnung beinhaltet ebenfalls maximal 10 Phononen und die Zustände wurden gemäss (II.143) umgeordnet.

Im ersten Teil von Fig.II.19 sind einige Zustände ausgewählt und ihre Abweichung von den exakten Werten (30-Phononenrechnung) über s aufgetragen und zwar einmal für $t=0$ und optimales t . Diese Rechnung ist ohne Umordnung der Zustände gemacht worden. Für einige BE2-Werte und Quadrupolmomente wurde das gleiche im zweiten Teil von Fig.II.19 gemacht. Es ist klar zu sehen, dass die Konvergenz zwar etwas verbessert wurde, aber nicht so drastisch wie im Falle von ^{166}Er .



Errors in the calculated energies
of the first three $J=0$ states.
(10 $\hbar\omega$ expansion basis)

^{126}Xe

Fig. II.18

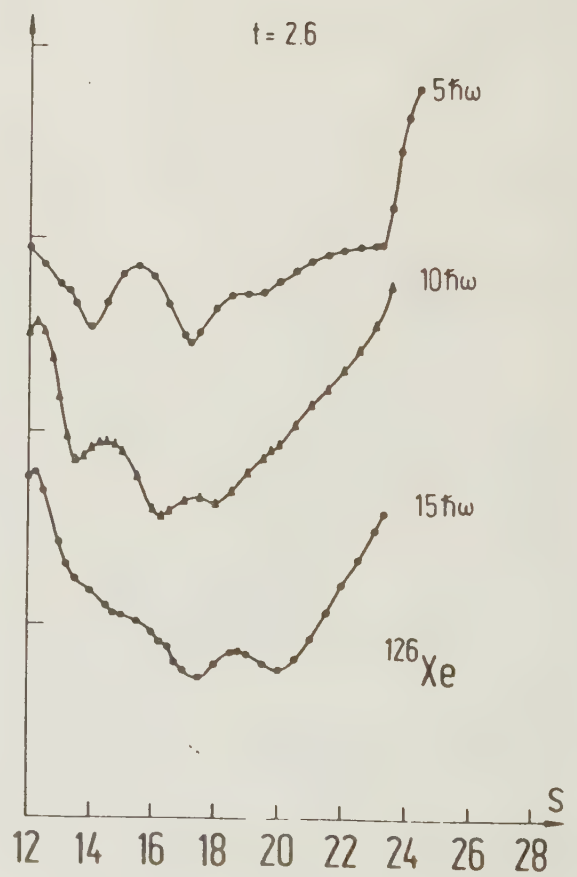
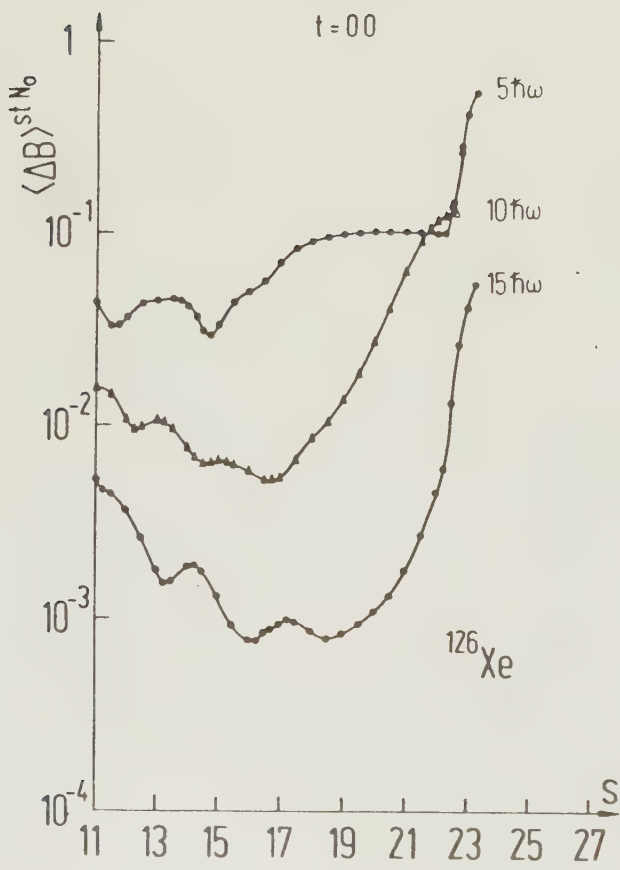
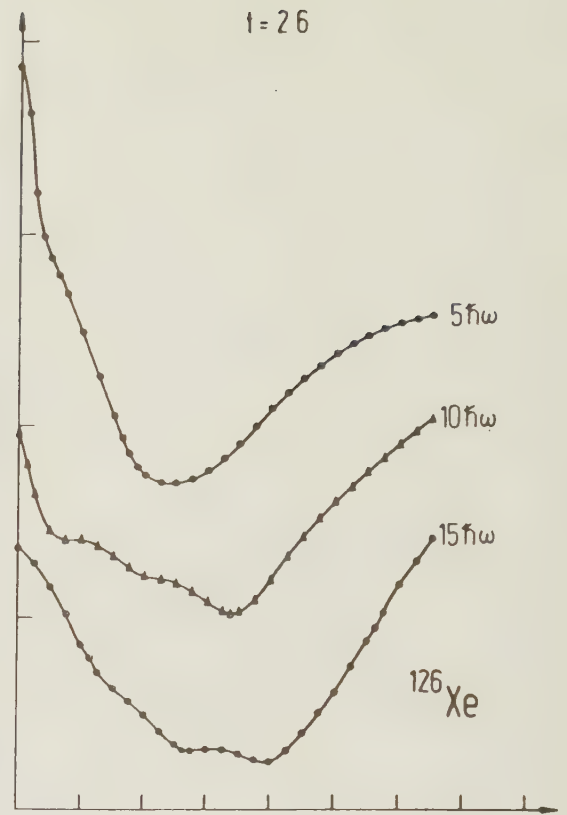
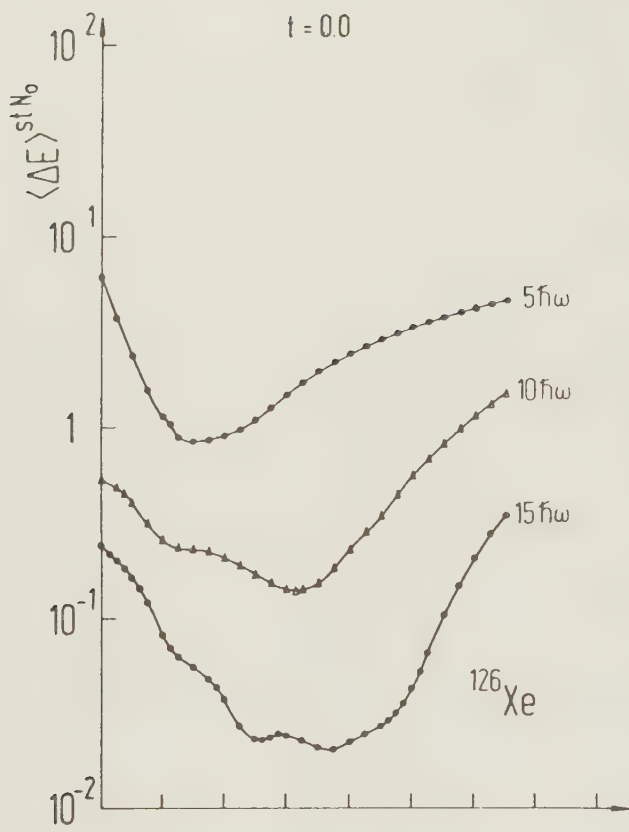


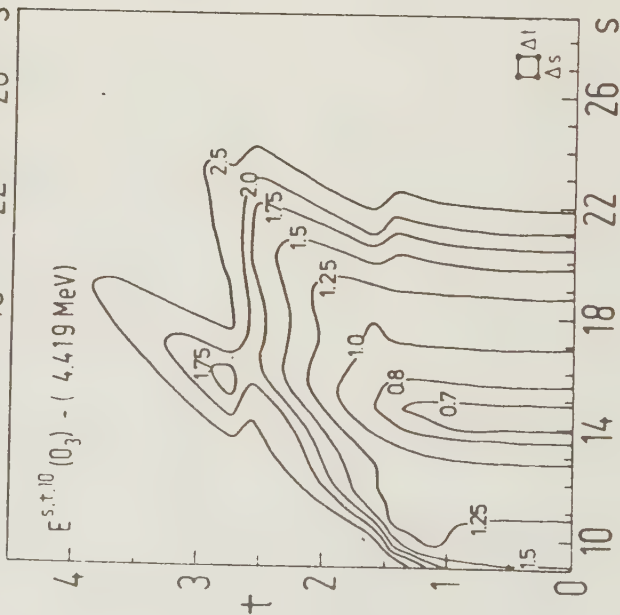
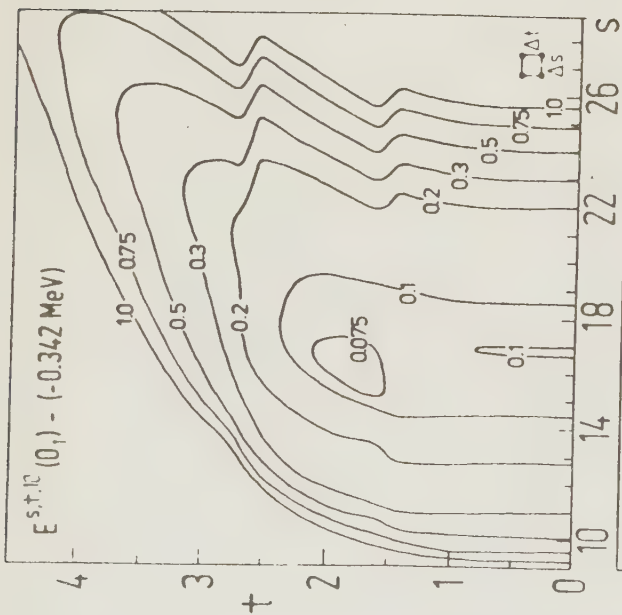
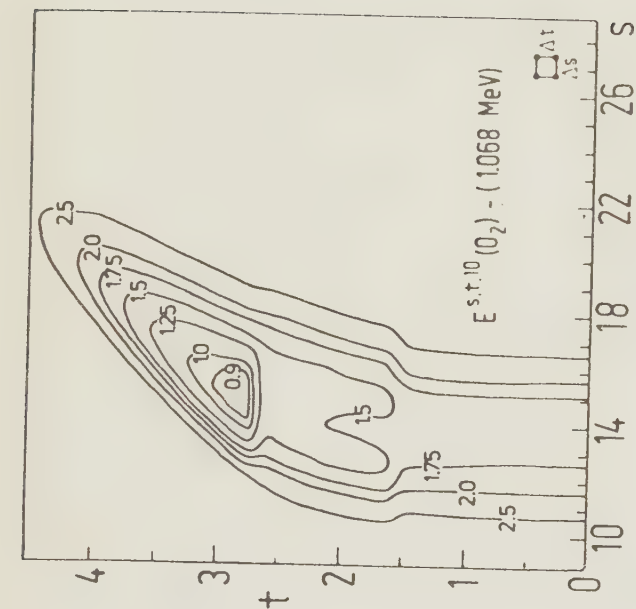
Fig. II. 19

(iii) ^{142}Sm (25)

Im nächsten Beispiel besitzt die PES zwei Minima bei verschiedenem β . Hier sind in Fig.II.20 ebenfalls $E(0_1^+)$, $E(0_2^+)$ und $E(0_3^+)$ in Abhängigkeit von s und t aufgezeichnet. In Fig.II.21 sind schliesslich einige Energien bzw. BE2-Werte plus Quadrupolmomente über s aufgetragen. Dabei ist in Fig.II.20 kein klares Minimum zu erkennen. Da die 0^+ -Zustände entweder im ersten oder zweiten Minimum der PES sind, haben die Zeichnungen in Fig.II.20 jeweils bei verschiedenem (s,t) eine Senke. In Fig.II.21 schliesslich ist im Mittel keine Verbesserung der Konvergenz zu erkennen. Die Erklärung ist, dass bei geeigneter Wahl der Basisparameter entweder die Konvergenz der Zustände im einen oder dem anderen Minimum gut ist, aber nicht gleichzeitig in beiden. Dies erklärt die verschiedene Lage der Minima in Fig.II.20 und dass im Mittel keine Verbesserung der Konvergenz zu erzielen ist.

(iv) $^{166}\text{Er}^*$

Das letzte Beispiel ist ein γ -instabiler Kern, der aus ^{166}Er (siehe Fig.II.10) konstruiert wurde, indem für alle γ der Schnitt in β -Richtung der gleiche ist, wie bei ^{166}Er mit $\gamma=0^\circ$. In Fig.II.22 sind einige Zustände und BE2-Werte plus Quadrupolmomente hervorgehoben und deren mittlere Abweichung vom exakten Wert (30-Phononenrechnung) aufgetragen über s für $t=0$ und $t=\text{optimal}$, ohne Umordnung der Zustände nach den Energien. Die Verbesserung der Konvergenz ist enorm und im Mittel fast um einen Faktor 10 besser! Dies ist aber nicht verwunderlich, da das Basispotential ebenfalls ein γ -instabiles Potential ist und somit das reale Potential von $^{166}\text{Er}^*$ am besten annähert, auf alle Fälle weitaus besser als ein harmonischer Oszillator als Basis. Die Schwankungen in Fig.II.22 kommen dadurch zustande, dass mit wachsendem t



Errors in the calculated energies
of the first three $J=0$ states.
($10\hbar\omega$ expansion basis)

^{142}Sm

Fig. II.20

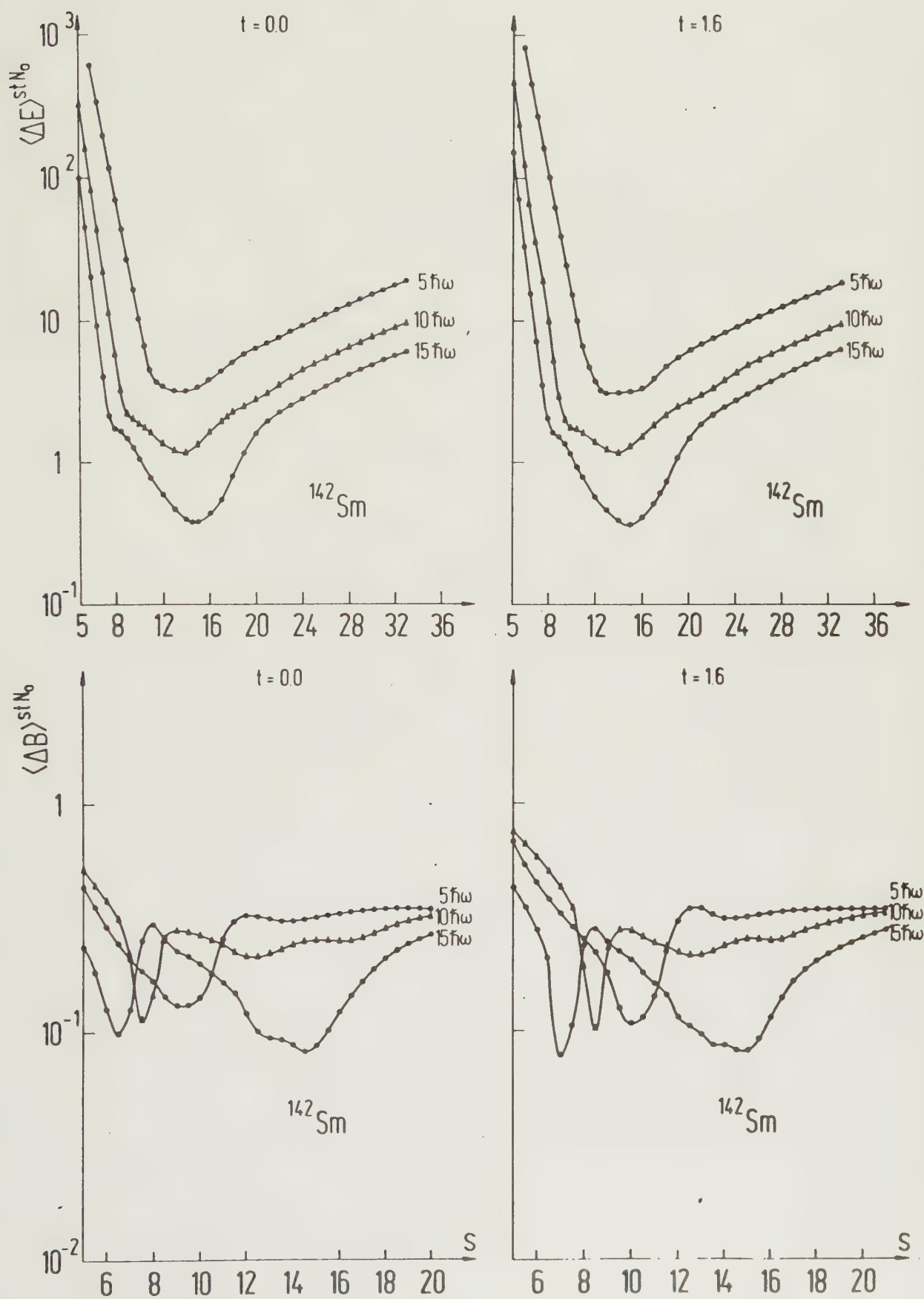


Fig. II.21

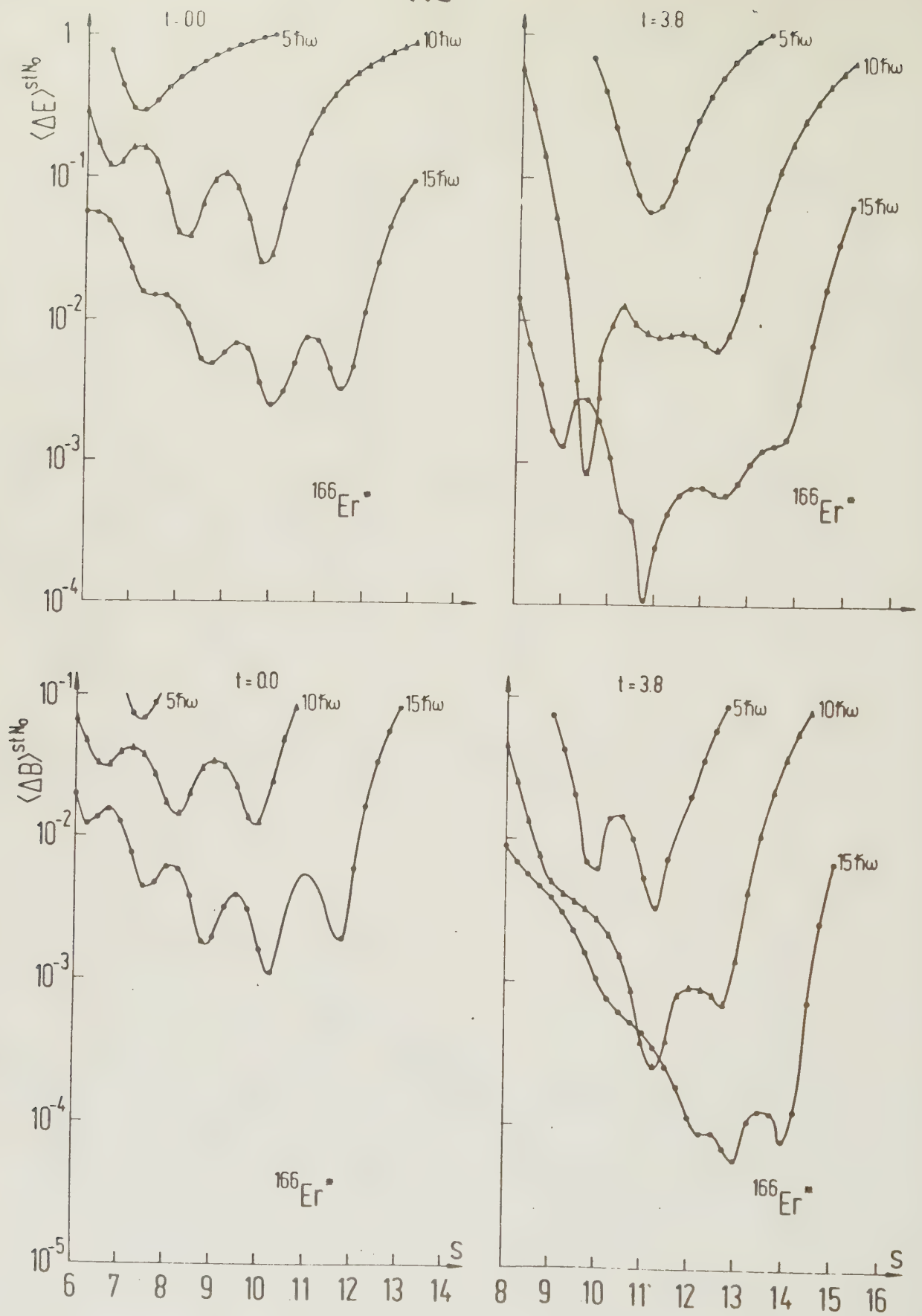


Fig. II.22

höher liegende Zustände allmählich weiter herunterkommen und die Position des vorher letzten Zustandes schneiden. Da diese von oben kommenden Basiszustände nicht mitgenommen werden, aber in der Nähe des Kreuzungspunktes mit dem vorher letzten Zustand stark wechselwirkt, ist es nicht verwunderlich, dass es sich auf die Konvergenz bemerkbar macht.

(5) Abschätzen der besten Basis

(a) Einführende Bemerkungen

Von den Figuren im letzten Abschnitt ist es klar, dass eine gute Wahl von s und t sehr wichtig ist. Wie machte man dies früher?: Die Methode bestand darin das Minimum von

$$E^s(0_1^+) = \text{Min} \quad \text{oder} \quad \sum_{i=1}^3 E^s(0_i^+) = \text{Min} \quad (\text{II.146})$$

zu suchen. Im Falle des harmonischen Oszillators als Basis ($t=0$) hängen die Funktionen in (II.146) nur vom Parameter s ab. Man wählte nun ein Gitter in s und diagonalisierte überall die Hamiltonmatrix! Um Zeit zu sparen, wurde das Gitter möglichst gross gewählt. Der Nachteil war also ein hoher Zeiaufwand und ungenaue Wahl der Basis. Das letztere war nicht so wichtig, da bei einer 30-Phononenrechnung die Konvergenz so gut war, dass es nicht auf eine genaue Wahl von s ankam. Da das Anpassungsprogramm, mit dem die Parameter des Hamiltonoperators bestimmt werden, nur mit 20 Phononen arbeitet, ist es sehr wichtig s sehr genau zu bestimmen.

Jetzt liegen aber zwei Parameter vor! Wenn die alte Methode

benutzt wird, so ist zu vermuten, dass dieser Zeitaufwand den Vorteil einer kleineren Basis wieder aufhebt. Aus diesem Grunde musste eine Methode gefunden werden, die

- (a) Diagonalisierung von H vermeidet und
- (b) möglichst einfach sein muss

Eine solche wurde auch gefunden. Sie arbeitet besser als die zu erst genannte und so schnell, dass binnen ca. 1sec der Computer das Ergebnis liefert.

(b) Methode zu Bestimmung der optimalen Basisparameter

In Ref.(24) wurde bewiesen, dass die berechneten Energien stets grösser oder gleich sind als die wahren Werte:

$$E_i^c \geq E_i^0 \quad (\text{II.147})$$

falls eine endliche Basis $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ zur Diagonalisierung verwendet wird. Bei Vergrösserung der Basis nähert sich E immer mehr dem Wert E_i^0 und erreicht ihn erst dann, wenn die Basis unendlich gross ist. I.a. wird bei einer geeignet grossen Basis die Genauigkeit ausreichend gut, sodass das Abschneiden der höheren Basisfunktionen keinen bemerkenswerten Fehler ergibt.

Bei endlicher Basis ist die Konvergenz am besten, wo die Funktionen E_i^c im Mittel ihr Minimum haben. Wegen dieser Eigenschaft ist es durchaus begründet das Minimum über die Summe der ersten 0^+ -Zustände zu suchen. Wenn c_m ($c_1=s$, $c_2=t$) die Basisparameter sind, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial c_m} \sum_{i=1}^k E_i^c(0_i^+) = 0, \quad m=1,2, \quad k=\text{fest} \quad (\text{II.148})$$

Leider sind keine analytischen Ausdrücke dafür verfügbar, sodass anstatt (II.148) eine andere Funktion gewählt wurde:

$$\frac{\partial}{\partial c_m} \sum_{k=1}^k \langle \phi_{i,t} | H | \phi_{i,t} \rangle = 0 \quad (\text{II.149})$$

$\phi_{i,t}$ sind die Basiszustände. Die Begründung, weshalb (II.149) zum Erfolg führt, ist in Fig.II.23 illustriert. Wir sind nicht am absoluten Wert von (II.148) interessiert, sondern nur an der Lage des Minimums. Und gerade darin liegt die Gemeinsamkeit von (II.148) und (II.149). Die Diagonalmatrixelemente haben ihr Minimum in der Nähe desjenigen von (II.148)! Hier kann ich allerdings keinen Beweis liefern, aber der Erfahrung nach funktioniert diese Methode und folgende Überlegung versucht dies zu fundieren: Die Annahme ist, dass die ersten 0^+ -Zustände der Basis am meisten zum Grundzustand beitragen. Diese tragen dann am meisten bei, falls

$$\sum_{i=1}^k \langle \phi_i^{s,t} | H | \phi_i^{s,t} \rangle = \min.$$

Wie gut diese Methode funktioniert, ist anhand der Tabelle II.11 zu sehen. Erfahrungsgemäss ist der beste Wert von $k=3$ bei $t \gtrsim 2$ und $k=12$ bei $t \approx 0$. Im Anhang (J) ist die explizite Formel von (II.149) für den im Modell verwendeten Hamiltonoperator angegeben.

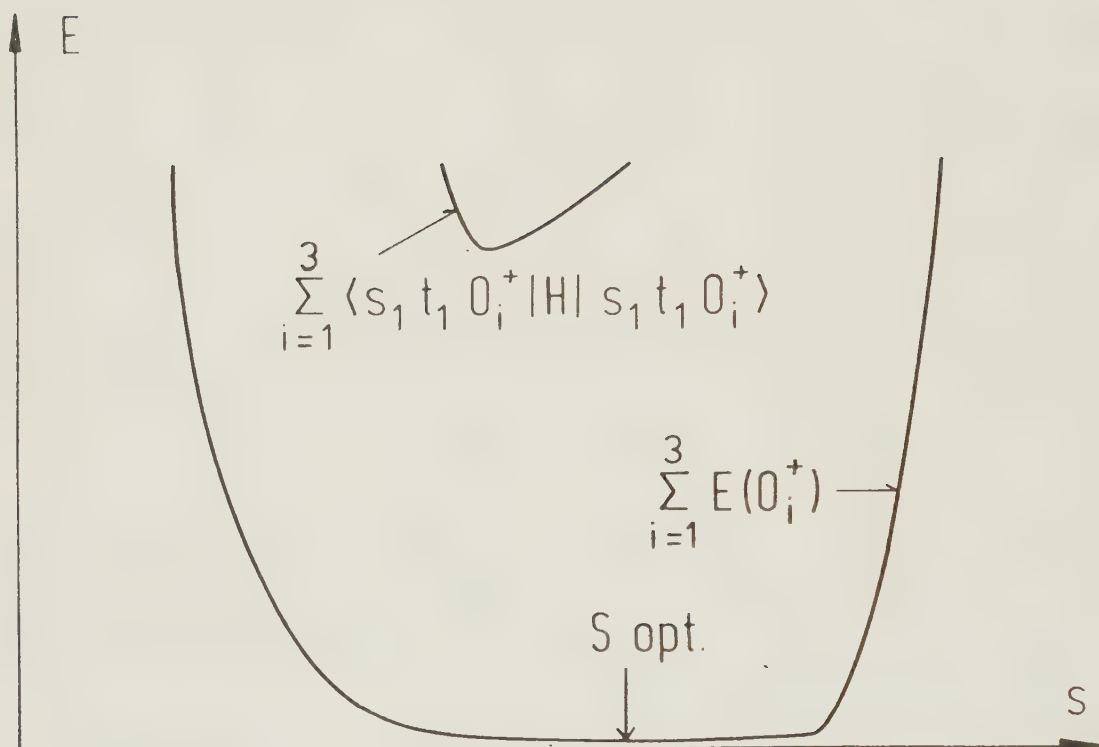


Fig. II.23

Tabelle II.11

Isotop		$\sum_{i=1}^3 s_{i,t} \langle 0; 1H 0_i \rangle s_{i,t}$	$\sum_{i=1}^3 s_{i,t=0} \langle 0; 1H 0_i \rangle s_{i,t=0}$
^{166}Er	s	10.55	6.65
	t	3.57	✓
	β_0	0.33	✓
^{126}Xe	s	18.33	13.90
	t	2.65	✓
	β_0	0.14	✓
^{142}Sm	s	15.08	14.00
	t	1.56	✓
	β_0	0.10	✓

Geschätzte optimale Basisparameter

(III) Vergleich zwischen dem Interacting Boson Model (IBM)
und dem generalisierten Modell

(1) Einführung in das IBM (26,27)

Die Idee des IBM ist recht einfach: Jeder Kern wird eingeteilt in einen "inaktiven" Rumpf (abgeschlossene Schale) und aktive Nukleonen ausserhalb der abgeschlossenen Schale. Normalerweise koppeln diese Nukleonen zum Spin 0 (s-Bosonen), aber es besteht auch eine nicht verschwindende Wahrscheinlichkeit, dass diese zum Spin 2 koppeln (d-Bosonen). Da die letzte Kopplung energetisch ungünstiger ist, liegen die zu 2 gekoppelten Nukleonenpaare energetisch höher (siehe Fig.II.1)

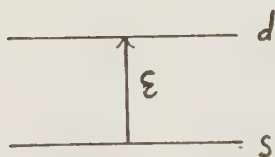


Fig. III.1

Wird nicht zwischen den Protonen und Neutronen unterschieden, so liegen zwei Sorten von Quasiteilchen vor, die Bosonencharakter haben:

(i) d-Bosonen, die aus zwei zu " $L=2$ " gekoppelten Nukleonen bestehen.

(ii) s-Bosonen, die aus zwei zu ''L=0'' gekoppelten Nukleonen bestehen.

Die Gesamtzahl der Bosonen

$$N = n_d + n_s \quad (\text{III.1})$$

bleibt konstant und sie beträgt gerade die halbe Nukleonenzahl ausserhalb der geschlossenen Schale. Hier kommt eine Eigenheit des Modells zu Tage: Es gibt eine maximale Anzahl für die Bosonen und diese steht in unmittelbarer Beziehung zu einer mikroskopischen Beschreibung der Kerne.

$$N = \text{konst.} \quad (\text{III.2})$$

Der IBM-Hamiltonoperator wird ähnlich wie in jedem Teilchen-Loch-Bild angesetzt:

$$\begin{aligned} H_{\text{IBM}} = & \epsilon_s \hat{n}_s + \epsilon_d \hat{n}_d + \sum_{L=0,2,4} V_L^A [[d^\dagger \times d^\dagger]^L \times [d \times d]^L]_0^0 + \\ & + V^B [d^\dagger \times d]_0^0 s^\dagger s + V^C s^{\dagger 2} s^2 + \\ & + V^D \{ [d^\dagger \times d^\dagger]_0^0 s^2 + s^{\dagger 2} [d \times d]_0^0 \} + \\ & + V^E \{ [[d^\dagger \times d^\dagger]^2 \times d]_0^0 s + s^\dagger [d^\dagger \times [d \times d]^2]_0^0 \} \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Die Wechselwirkung entspricht einer Zwei-Teilchen-Zwei-Loch-Wechselwirkung. Die Faktoren vor den einzelnen Wechselwirkungstermen sind Matrixelemente des Wechselwirkungspotentials zwischen den Nukleonenpaaren, wenn von einem mikroskopischen Bild ausgegangen wird. Meistens werden diese aber als Parameter des Modells angenommen!

Der Quadrupoloperator in diesem Modell ist wie folgt definiert:

$$T_m^{(2)} = \alpha_2 [d^\dagger s + s^\dagger d]_m^2 + \beta_2 [d^\dagger \times d]_m^2 \quad (\text{III.4})$$

Dabei sind α_2 und β_2 Parameter und zusammen mit den 9 Parametern im Hamiltonoperator hat das Modell 11 Parameter. Wie

weiter unten zu sehen ist, sind beim echten Quadrupoloperator die Terme α_2 und β_2 festgelegt. Durch Einführung der zwei Parameter sind aber die BE2-Werte besser anzupassen.

Das IBM hat nun verschiedene Grenzfälle, bei denen für die Energie ein analytischer Ausdruck besteht.

(i) $\epsilon_d \gg \epsilon_\gamma$ (Vibrationslimit)

In diesem Fall überwiegt der Term $\epsilon_d \hat{n}_d$ und der Hamiltonoperator bekommt die Form des 5-dimensionalen harmonischen Oszillators:

$$H_5 = \epsilon_d \sum_m d_m^\dagger d_m = \epsilon_d \hat{n}_d \quad (\text{III.5})$$

Die Eigenfunktionen werden gemäss der Gruppenkette

$$SU(6) \supset SU(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2) \quad (\text{III.6})$$

klassifiziert:

$$|N, n_d, \lambda, n_\Delta, L, M\rangle \quad (\text{III.7})$$

N ist die Gesamtbosonenzahl und n_Δ ist eine zusätzliche Quantenzahl, die nichts mit der Quantenzahl M zu tun hat, die in Ref. (17, 18) eingeführt wurde. Ansonsten sind die anderen Quantenzahlen bereits in Kapitel II definiert worden. Zum Hamiltonoperator (III.5) kann noch der Wechselwirkungsanteil

$$\sum_L V_L^A [[d^\dagger \times d^\dagger]^L \times [d \times d]^L]^0 \quad (\text{III.8})$$

hinzugefügt werden, da er nur einen Beitrag zu Diagonalelementen liefert ($\Delta n_d = 0$)! Für diesen Fall ist die Energie durch

$$E([N], n_d, \lambda, n_\Delta, L, M) = \epsilon_d n_d + \frac{\alpha}{2} n_d (n_d - 1) + \beta (n_d - \lambda)(n_d - \lambda + 3) + \gamma [L(L+1) - 6 n_d] \quad (\text{III.9})$$

$n_d = 0, 1, 2, \dots, N$
gegeben. α , β und γ stehen zu den V_L^A -Koeffizienten in

folgender Beziehung:

$$\begin{aligned} V_0^A &= 2(\alpha + 10\beta - 12\gamma) \\ V_2^A &= \frac{2}{\sqrt{5}}(\alpha - 6\gamma) \\ V_4^A &= \frac{2}{\sqrt{5}}(\alpha + 8\gamma) \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Die α -, β - und γ -Terme treten als Folge des Wechselwirkungsanteils (III.8) auf und erzeugen ein $L(L+1)$ -Spektrum. Damit können leichte Abweichungen vom "reinen Vibrator" analytisch beschrieben werden.

(ii) Rotationslimit

Hier wird der Hamiltonoperator aus einer Quadrupol-Quadrupolwechselwirkung aufgebaut. Wenn

$$\hat{Q}_i = \sqrt{\frac{7}{2}} [d_i^+ d_i^-]^2 + \sqrt{\frac{7}{2}} (d_m^+ s + s^+ d_m) \quad (\text{III.11})$$

die Komponenten des Quadrupoloperators des i -ten Teilchens sind, dann ist die Form des Hamiltonoperators

$$H = -\kappa \sum_{i,j=1}^N \hat{Q}_i \cdot \hat{Q}_j - \kappa' \sum_{i,j=1}^N \hat{L}_i \cdot \hat{L}_j \quad (\text{III.12})$$

mit $\hat{Q}_i \cdot \hat{Q}_j = \sum_{m=-2}^2 \hat{Q}_i^m \hat{Q}_j^m (-1)^m$
und $\hat{L}_i$ ist der Drehimpulsoperator des i -ten Teilchens.

Die harmonischen Terme $\epsilon_s \hat{n}_s$ und $\epsilon_d \hat{n}_d$ werden vernachlässigt. Die Form (III.12) ist nicht sehr einfach aus dem allgemeinen Ansatz (III.3) abzuleiten, sondern nur über umständliche Rechnungen. Die Form der Wechselwirkung ist aber ähnlich. Die Energie ist wie folgt gegeben:

$$E([N], (\lambda, \mu), \kappa, L, M) = \kappa \left[\frac{3}{4} L(L+1) - G(\lambda, \mu) \right], \quad (\text{III.13})$$

wobei $G(\lambda, \mu) = \lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3(\lambda + \mu)$

der quadratische Casimiroperator der Gruppe $SU(3)$ ist und die Quantenzahlen (λ, μ) die irreduziblen Darstellungen der

Gruppe klassifizieren. Die Zustände werden somit nach der Gruppenkette

$$SU(6) \supset SU(3) \supset O(3) \supset O(2) \quad (\text{III.14})$$

klassifiziert.

(iii) Übergang vom Rotations- zum Vibrationslimit

Hier wird Störungsrechnung betrieben, wobei vom Rotationslimit ausgegangen wird und harmonische Störterme $\epsilon \hat{n}_d$ hinzugefügt werden.

(iv) Allgemeiner Fall

In diesem Fall muss der gesamte IBM-Hamiltonoperator numerisch diagonalisiert werden. Eine analytische Form für die Energie existiert hier nicht!

(2) Beschreibung des Frankfurter Hamiltonoperators

Der in Frankfurt konstruierte Hamiltonoperator wurde schon in Kapitel I erklärt. Hier sei nur noch eine andere Schreibweise erwähnt: $(\beta_m^+ \hat{=} d_m^+, \beta_m \hat{=} d_m)$

Mit Hilfe der Gradientenformel (siehe II.125 und Ref. (7), (22)) können die Matrixelemente von π_m^* durch die von α_{2m} berechnet werden:

$$\langle \nu' \lambda' \dots | \pi_{2m}^* | \nu \lambda \dots \rangle = i(\nu' - \nu) \langle \nu' \lambda' \dots | \alpha_{2m} | \nu \lambda \dots \rangle \quad (\text{III.15})$$

Da $(\nu' - \nu) = \pm 1$ ist, gilt $(-1)^{\nu' - \nu} = i(\nu' - \nu) = e^{\frac{i(\nu' - \nu)\pi}{2}}$. Dies ist äquivalent dazu, dass für π_{2m} folgendes gesetzt wird (27):

$$\pi_{2m}^* = e^{\frac{i\pi \hat{n}_d}{2}} \alpha_{2m} e^{-\frac{i\pi \hat{n}_d}{2}} \quad (\text{III.16})$$

wobei $\hat{n}_d$ der Teilchenzahloperator für die Bosonen ist. Speziell der $[\pi^{(2)} \times \pi^{(2)}]_0^{(\omega)}$ Anteil kann recht einfach durch den

neuen Ausdruck ersetzt werden:

$$[\Pi^{[2]} \times \Pi^{[2]}]_0^{[0]} = e^{\frac{i\pi \hat{n}_d}{2}} [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]_0^{[0]} e^{-\frac{i\pi \hat{n}_d}{2}} \quad (\text{III.17})$$

Das kollektive Potential ist ein Polynom in β und $\cos 3\gamma$:

$$V_F(\beta, \cos 3\gamma) = \sum_{s,m} V_{s,m} \beta^s (\cos 3\gamma)^m \quad (\text{III.18})$$

Der kollektive Hamiltonoperator, der in Frankfurt entwickelt wurde, ist somit eine Funktion in $\hat{n}_d$, β und $\cos 3\gamma$:

$$H_F = H_F(\hat{n}_d, \beta, \cos 3\gamma) \quad (\text{III.19})$$

(3) Beschreibung des IBM-Hamiltonoperators

Die Idee, die dem folgenden Vorgehen zugrunde liegt, ist einen zum IBM-Hamiltonoperator äquivalenten Operator zu konstruieren, der nur auf dem Raum der d-Bosonen wirkt. Er soll die gleichen Energien liefern, ist somit physikalisch vollkommen äquivalent zum alten Operator, obwohl sie mathematisch betrachtet in verschiedenen Räumen wirken. Das Vorgehen ist so, dass die s-Bosonen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren durch entsprechende Ausdrücke in den d-Bosonen ersetzt werden.

Der IBM-Hamiltonoperator wird aus zwei Anteilen zusammengesetzt. Der erste ist proportional zu dem Teilchenzahloperator der d- bzw. s-Bosonen:

$$\hat{n}_d = \sum_m d_m^\dagger d_m \quad (\text{III.20a})$$

$$\hat{n}_s = s^\dagger s \quad (\text{III.20b})$$

Der Gesamtteilchenzahloperator ist

$$\hat{N} = \hat{n}_d + \hat{n}_s \quad (\text{III.21})$$

d.h. dass für $\hat{n}_s$ folgendes gesetzt werden kann

$$\hat{n}_s = \hat{N} - \hat{n}_d \quad (\text{III.22})$$

Der zweite Anteil des Hamiltonoperators entspricht einer Zweiteilchen-Zweiloch-Anregung, zusammengesetzt aus den Kopplungen

$$A_L = [[d^\dagger \times d^\dagger]^L \times [d \times d]^L]_0^0 \quad (\text{III.23a})$$

$$B = [d^\dagger \times d]_0^0 s^\dagger s \quad (\text{III.23b})$$

$$C = s^{\dagger 2} s^2 = s^\dagger s (s^\dagger s - 1) \quad (\text{III.23c})$$

$$D = [d^\dagger \times d^\dagger]_0^0 s^2 + s^{\dagger 2} [d \times d]_0^0 \quad (\text{III.23d})$$

$$E = [[d^\dagger \times d^\dagger]^2 \times d]_0^0 s + s^\dagger [d^\dagger \times [d \times d]^2]_0^0 \quad (\text{III.23e})$$

(4) Vereinfachung der Wechselwirkungsanteile

(a) A_L -Anteil

Wird die Kopplung $[[d^\dagger \times d^\dagger]^L \times [d \times d]^L]_0^0$ ausgerechnet, so stellt sich heraus, dass die verschiedenen L-Komponenten in den $\hat{n}_d$, $\hat{\Lambda}^2$ (Seniorität) und $\hat{L}^2$ ausgedrückt werden können (27):

$$A_0 = \frac{1}{5} \hat{n}_d (\hat{n}_d + 3) - \frac{1}{5} \hat{\Lambda}^2 \quad (\text{III.24a})$$

$$A_2 = \frac{1}{7\sqrt{5}} \{-\hat{L}^2 + 2\hat{\Lambda}^2 + 2\hat{n}_d(\hat{n}_d - 2)\} \quad (\text{III.24b})$$

$$\text{und } A_4 = \frac{1}{7} \left\{ \frac{1}{3} \hat{L}^2 - \frac{1}{5} \hat{\Lambda}^2 + \left(\frac{6}{5} \right) \hat{n}_d (\hat{n}_d - 2) \right\} \quad (\text{III.24c})$$

Da die Basisfunktionen im IBM-Modell Eigenfunktionen zum harmonischen Oszillator

$$H_\xi = \epsilon_d \hat{n}_d + \epsilon_s \hat{n}_s \quad (\text{III.25})$$

sind, dessen maximale Symmetriegruppe $U(6)$ ist und diese Funktionen so konstruiert werden können, dass sie auch Eigenfunktionen zu jedem Casimiroperator der Gruppenkette

$$U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3) \quad (\text{III.26})$$

sind, verbinden die Anteile A_0 , A_2 und A_4 nur Eigenfunktionen gleicher Quantenzahlen, d.h. sie bilden nur einen Beitrag zum Diagonalelement.

(b) B+C-Anteil

Diese können in den Teilchenzahloperatoren

$$\begin{aligned} \hat{n}_d &= \sum_m d_m^\dagger d_m = \sqrt{5} [d^\dagger \cdot d]_0^0 \\ \hat{n}_s &= \hat{N} - \hat{n}_d = s^\dagger s \end{aligned} \quad (\text{III.27a})$$

ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\sqrt{5}} \hat{n}_d (N - \hat{n}_d) \\ C &= (N - \hat{n}_d)(N - \hat{n}_d - 1) \end{aligned} \quad (\text{III.27b})$$

Für $\hat{N}$ wird N gesetzt, da im IBM die Gesamtzahl der Bosonen konstant bleibt, d.h. dass

$$\hat{N} |N n_d \lambda n_s L M\rangle = N |N n_d \lambda n_s L M\rangle \quad (\text{III.28})$$

stets gilt.

Diese beiden Anteile (B+C) tragen ebenfalls nur bei den Diagonalelementen bei!

(c) D-Anteil

Dazu ist zu beachten, dass die Wirkung von s auf die Basiszustände $|n_s\rangle |N - n_d \lambda n_d L M\rangle$ wie folgt sind:

$$\begin{aligned} s^\dagger |n_s\rangle |N n_d \lambda n_d L M\rangle &= (N - n_d + 1)^{\frac{1}{2}} |n_s + 1\rangle |N n_d \lambda n_d L M\rangle \\ s |n_s\rangle |N n_d \lambda n_d L M\rangle &= (N - n_d)^{\frac{1}{2}} |n_s - 1\rangle |N n_d \lambda n_d L M\rangle \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

Nun lässt sich dasselbe Resultat erzielen, wenn anstatt dem s - plus d -Bosonenraum nur der Unterraum der d -Bosonen betrachtet wird und für $s^\dagger$, s die Operatoren $(N - \hat{n}_d + 1)^{\frac{1}{2}}$, $(N - \hat{n}_d)^{\frac{1}{2}}$ eingesetzt werden. Für N wurde dabei die Zahl N eingesetzt, da die Gesamtzahl der Bosonen ($s+d$) erhalten bleiben soll. Über diese Bedingung sind die s -Bosonen immer noch in dem Modell enthalten, allerdings indirekt. Wenn n_d z.B. um 1 erhöht wird, dann entspricht die der Erniedrigung von n_s um -1, da N konstant ist. Physikalisch hat somit sich nichts geändert!

Damit lässt sich D wie folgt schreiben:

$$D = [d^\dagger \times d]_0^0 \{ (N - \hat{n}_d)(N - \hat{n}_d - 1) \}^{\frac{1}{2}} + \{ (N - \hat{n}_d)(N - \hat{n}_d + 1) \}^{\frac{1}{2}} [d \times d]_0^0 \quad (\text{III.30})$$

(Dabei ist zu beachten, dass im zweiten Term der Ausdruck $s^{\dagger 2}$ links von $[d \times d]_0^0$ steht, dieser also zunächst 2 d -Bosonen vernichtet, bevor zwei s -Bosonen erzeugt werden können.

Was die Auswahlregeln bezüglich der s - und d -Bosonen betrifft, so haben sie sich beim D -term nicht geändert. Da der D -Term die d -Bosonenzahl nicht erhält (er erzeugt bzw. vernichtet zwei d -Bosonen), wird auch die s -Bosonenzahl nicht erhalten bleiben, da N als konstant vorausgesetzt wird. Nehmen wir z.B. den Term proportional zu $[d^\dagger \times d]_0^0$. Er erzeugt zwei d -Bosonen, muss also zwei s -Bosonen vernichten, um die Gesamtbosonenzahl $N = n_s + n_d$ zu erhalten. Dies wurde im alten Operator durch s^2 bewirkt und ist hier nur indirekt vorhanden.

Jetzt kann D noch weiter umgeschrieben werden. Um dies ein-

fach zu gestalten, wird $\hbar = \beta_2 = C_2 = 1$ gesetzt. Damit gilt

$$\alpha_{2,m} = \frac{1}{\sqrt{2}} (d_m^+ + d_m) \quad (\text{III.31a})$$

und

$$\begin{aligned} [\alpha^{(2)} \times \alpha^{(2)}]_0^{(0)} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_m (-1)^m \alpha_{2m} \alpha_{2-m} \\ &= \frac{1}{2} \{ [d^+ \times d^+]_0^0 + [d^+ \times d]_0^0 + [d \times d^+]_0^0 + [d \times d]_0^0 \} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \beta^2 \end{aligned} \quad (\text{III.31b})$$

falls die d-Bosonen mit den normalen Schwingungsbosonen ($d^+ \triangleq \beta^+$, siehe Kapitel II) verglichen werden. Damit lässt sich $[d^+ \times d^+]_0^0$ und $[d \times d]_0^0$ durch $\hat{n}_d$ und β ersetzen:

$$\begin{aligned} [d^+ \times d^+]_0^0 &= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{4}{5}} \{ [\hat{n}_d \beta^2 - \beta^2 (\hat{n}_d - 2)] + \\ &+ e^{i\pi \hat{n}_d} [\hat{n}_d \beta^2 - \beta^2 (\hat{n}_d - 2)] e^{-i\pi \hat{n}_d} \} \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

Dass dies richtig ist, erkennt man, wenn die Matrixelemente $[d^+ \times d^+]_0^0$ betrachtet werden:

$$\begin{aligned} &\langle N n_d' \lambda n_d L M | [d^+ \times d^+]_0^0 | N n_d \lambda n_d L M \rangle = \\ &= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{4}{5}} (n_d' - n_d + 2) \{ 1 + e^{i\pi (n_d' - n_d)} \} \langle N n_d' \lambda n_d L M | \beta^2 | N n_d \lambda n_d L M \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.33})$$

Der Vorfaktor verschwindet für $n_d' - n_d = -2, 0$. Dies zeigt, dass $[d^+ \times d^+]_0^0$ äquivalent zu dem obigen Ausdruck in $\hat{n}_d$ und β^2 ist!

Analog geht es für den $[d \times d]_0^0$ -Anteil:

$$\begin{aligned} [d \times d]_0^0 &= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{4}{5}} \{ [\hat{n}_d \beta^2 - \beta^2 (\hat{n}_d + 2)] + \\ &+ e^{i\pi \hat{n}_d} [\hat{n}_d \beta^2 - \beta^2 (\hat{n}_d + 2)] e^{-i\pi \hat{n}_d} \} \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

Der entsprechende Vorfaktor im Matrixelement ist

$$(n_d' - n_d - 2) \{ 1 + e^{i\pi (n_d' - n_d)} \} \quad (\text{III.35})$$

welcher für $n_d' - n_d = +2, 0$ verschwindet. Da der D-Anteil im ersten Term zunächst zwei s-Bosonen vernichtet, d.h. zwei d-Bosonen erzeugt, ist dies der erste nichtdiagonale Anteil

des Hamiltonoperators. Analog gilt es für den 2. Term.

(d) E-Anteil

Da mit $\alpha_{2m} = \frac{1}{\sqrt{2}} (d_m^+ + d_m)$ gilt:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2} [[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]}]_0^{[0]} &= [[d^+ \times d^+]^{[2]} \times d^+]_0^{[0]} + \\ &+ 3 [[d^+ \times d^+]^{[2]} \times d]_0^{[0]} + 3 [[d \times d]^{[2]} \times d^+]_0^{[0]} + \\ &+ [[d \times d]^{[2]} \times d]_0^{[0]} = -2\sqrt{2} \sqrt{\frac{2}{35}} \beta^3 \cos 3\gamma \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

kann $[[d^+ \times d^+]^2 \times d]_0^{[0]}$ und $[[d \times d]^2 \times d^+]_0^{[0]}$ durch $\beta^3 \cos 3\gamma$ ersetzt werden, mit einem Faktor, der ähnlich wie beim D-Anteil von n abhängt:

$$[[d^+ \times d^+]^2 \times d]_0^{[0]} = -\frac{1}{6\sqrt{35}} \{ [\hat{n}_d \beta^3 \cos 3\gamma - (\beta^3 \cos 3\gamma)(\hat{n}_d - 3)] - i e^{\frac{i\pi \hat{n}_d}{2}} [\hat{n}_d \beta^3 \cos 3\gamma - (\beta^3 \cos 3\gamma)(\hat{n}_d - 3)] e^{-\frac{i\pi \hat{n}_d}{2}} \} \quad (\text{III.37a})$$

$$[[d \times d]^2 \times d^+]_0^{[0]} = -\frac{1}{6\sqrt{35}} \{ [\hat{n}_d \beta^3 \cos 3\gamma - (\beta^3 \cos 3\gamma)(\hat{n}_d + 3)] - i e^{\frac{i\pi \hat{n}_d}{2}} [\hat{n}_d \beta^3 \cos 3\gamma - (\beta^3 \cos 3\gamma)(\hat{n}_d + 3)] e^{-\frac{i\pi \hat{n}_d}{2}} \} \quad (\text{III.37b})$$

Dass die Auswahlregeln gewährleistet sind, kann z.B. leicht beim $[[d^+ \times d^+]^2 \times d]_0^{[0]}$ -Term nachgerechnet werden. Die Matrixelemente besitzen den Vorfaktor

$$(n_d' - n_d + 3) \left\{ 1 - i e^{\frac{i\pi}{2} (n_d' - n_d)} \right\}, \quad (\text{III.38})$$

der für $n_d' - n_d = \pm 3, -1$ verschwindet und für $n_d' - n_d = +1$ ungleich Null wird.

Auch hier ist der E-Anteil eine Funktion von $\hat{n}_d$ und $\beta^3 \cos 3\gamma$ und bildet nichtdiagonale Anteile des IBM-Hamiltonoperators.

Zusammenfassend ist zu sagen, dass der gesamte IBM-Hamiltonoperator vom physikalischen Standpunkt äquivalent ist zu einem Hamiltonoperator in $\hat{n}_d$, β^2 und $\beta^3 \cos 3\gamma$:

$$H_{IBM} = H_{IBM}(\hat{n}_d, \beta^2, \beta^3 \cos 3\gamma) \quad (\text{III.39})$$

Werden die d-Bosonen gleich den gewohnten Schwingungsbosonen β_n gesetzt, so ist die Analogie zu dem in Frankfurt entwickelten Hamiltonoperator fast perfekt. Nur die funktionale Abhängigkeit ist nicht dieselbe. Im IBM liegt nur eine polynomiale Entwicklung in $\beta^2 \sim [\alpha^{(2)}_x \alpha^{(2)}_x]^{(0)}$ und $\beta^3 \cos 3\gamma \sim [\alpha^{(2)}_x \alpha^{(2)}_x]^{(2)} [\alpha^{(2)}_x \alpha^{(2)}_x]^{(0)}$ vor, mit der maximalen Potenz 2. Die Phononenzahl n_d ist durch N begrenzt. Dies bedeutet, dass maximal nur der Drehimpuls $L_{max} = 2N$ erzeugt werden kann! Hingegen in dem erweiterten Hamiltonoperator, der in Frankfurt entwickelt wurde, kommt ein beliebiges Polynom in β und $\cos 3\gamma$ vor und, was sehr entscheidend ist, N ist unbeschränkt.

Um in dem IBM-Hamiltonoperator diese Tatsache, dass nämlich $n_d \leq N$ ist, zu berücksichtigen, muss er noch mit dem Faktor

$$\Theta(N - \hat{n}_d) \quad (\text{III.40a})$$

multipliziert werden, mit

$$\Theta(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{x}{|x|} \right) \right] = \begin{cases} 1, & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (\text{III.40b})$$

Im folgenden ist der gesamte Hamiltonoperator des IBM in der $(n_d, \beta, \cos 3\gamma)$ -Darstellung angeben:

(III. 41)

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{IBM} = & \left[\varepsilon_d \hat{n}_d + \varepsilon_s (N - \hat{n}_d) + \right. \\
& + \frac{V_0^A}{5} \{ \hat{n}_d (\hat{n}_d + 3) - \hat{A}^2 \} + \\
& + \frac{V_2^A}{7\sqrt{5}} \{ -\hat{L}^2 + 2\hat{A}^2 + 2\hat{n}_d (\hat{n}_d - 2) \} + \\
& + \frac{V_4^A}{7} \{ \frac{1}{3} \hat{L}^2 - \frac{1}{5} \hat{A}^2 + (\frac{6}{5}) \hat{n}_d (\hat{n}_d - 2) \} + \\
& + \frac{V^B}{\sqrt{5}} \hat{n}_d (N - \hat{n}_d) + \\
& + V^C (N - \hat{n}_d) (N - \hat{n}_d - 1) + \\
& + V^D \left\{ \frac{1}{8} \sqrt{\frac{4}{5}} ([\hat{n}_d \beta^2 - \beta^2 (\hat{n}_d - 2)] + \right. \\
& \quad + e^{i\pi \hat{n}_d} [\hat{n}_d \beta^2 - \beta^2 (\hat{n}_d - 2)] e^{-i\pi \hat{n}_d}) ((N - \hat{n}_d)(N - \hat{n}_d - 1))^{\frac{1}{2}} + \\
& \quad + ((N - \hat{n}_d)(N - \hat{n}_d - 1))^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} \sqrt{\frac{4}{5}} ([\hat{n}_d \beta^2 - \beta^2 (\hat{n}_d + 2)] + \\
& \quad + e^{i\pi \hat{n}_d} [\hat{n}_d \beta^2 - \beta^2 (\hat{n}_d + 2)] e^{-i\pi \hat{n}_d}) \} + \\
& + V^E \left\{ -\frac{1}{6\sqrt{35}} ([\hat{n}_d \beta^3 \cos 3\gamma - (\beta^3 \cos 3\gamma) (\hat{n}_d - 3)] - \right. \\
& \quad - i e^{\frac{i\pi \hat{n}_d}{2}} [\hat{n}_d \beta^3 \cos 3\gamma - (\beta^3 \cos 3\gamma) (\hat{n}_d - 3)] e^{-\frac{i\pi \hat{n}_d}{2}}) (N - \hat{n}_d)^{\frac{1}{2}} - \\
& \quad - \frac{1}{6\sqrt{35}} (N - \hat{n}_d)^{\frac{1}{2}} \{ [\hat{n}_d \beta^3 \cos 3\gamma - (\beta^3 \cos 3\gamma) (\hat{n}_d + 3)] + \\
& \quad + i e^{\frac{i\pi \hat{n}_d}{2}} [\hat{n}_d \beta^3 \cos 3\gamma - (\beta^3 \cos 3\gamma) (\hat{n}_d + 3)] e^{-\frac{i\pi \hat{n}_d}{2}} \} \}. \\
& \cdot \Theta(N - \hat{n}_d)
\end{aligned}$$

(5) Vergleich beider Modelle

Da sowohl der Frankfurter Hamiltonoperator als auch der des IBM Funktionen von n_d , β und $\cos 3\gamma$ sind, wirken beide im gleichen Hilbertraum.

Das IBM ist in manchen Grenzfällen einfacher zu handhaben, wie z.B. für Rotationskerne, da dort analytische Ausdrücke für die Energie vorkommen. Im Frankfurter Modell ist allerdings der Grenzfall von guten Rotationskernen auch analytisch darstellbar. Das Rotations-Vibrations-Modell (RVM) (1) entwickelt die PES um das Minimum bei $\beta \neq 0$, $\gamma = 0$.

Das IBM hat auch einige Nachteile: N , die maximale Phononenzahl, ist konstant. Da $n_d \leq N$ und die d-Bosonen Drehimpuls 2 besitzen, kann damit nur ein maximaler Drehimpuls von $2N$ erzeugt werden. Eine Aussage des Modells ist deshalb, dass für $L > 2N$ keine kollektiven Anregungen mehr stattfinden. Experimentell sind aber bei einigen Kernen (z.B. ^{232}Th) schon höhere Zustände gemessen (41). Ein Ausweg daraus wäre die Einführung von höheren Bosonen (f-Bosonen), was allerdings zu einem weitaus komplizierteren Modell führt.

Ein weiterer Nachteil des IBM-Modells ist seine Unanschaulichkeit, da aus den Parametern nicht direkt eine PES konstruiert werden kann, die die Lage des Deformationsminimums angibt und die Lage von Nebenminima, die auf isomere Zustände schliessen lassen.

Der grosse Vorteil des IBM ist aber, dass ein direkter Bezug zu der Tatsache besteht, dass jeder Kern aus Nukleonen aufgebaut ist. Hier besteht eine gute Chance mikroskopische Modelle direkt mit den Ergebnissen des IBM zu vergleichen.

(IV) Anwendungen

Das in dem Kapitel (I) entwickelte Modell wird an den benachbarten Isotopenketten W, Os und Pt ausgetestet. Im Anschluss daran werden die Ergebnisse für $^{238}_{92}\text{U}$ angegeben. Die Beispiele sollen dazu dienen die Fähigkeiten aber auch die Grenzen des Modells aufzuzeigen.

(1) Os-, Pt- und W-Kette

(a) Diskussion der Parameter

Für diese Isotopenkette liegen eine Vielzahl von experimentellen Informationen vor, insbesondere für Os und Pt (29,30,31,10). Der Grund dafür ist, dass in diesem Bereich ein Strukturübergang zu erkennen ist: In Fig.IV.1 sind die experimentell gemessenen Quadrupolmomente gegenueber der Massenzahl in der Pt-Kette aufgetragen.

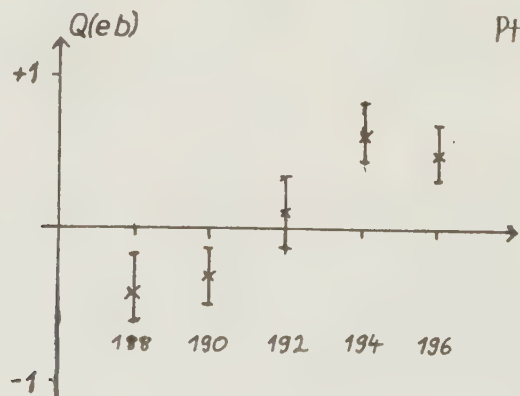


Fig. IV.1

Wenn im Laborsystem ein positives Vorzeichen gemessen wird,

dann liegt bei einfachen Modellen eine oblate Gestalt vor und bei einem negativen Vorzeichen eine prolate Gestalt. Solche Modelle sind z.B. das Rotations-Vibrations-Modell. Wenn das Quadrupolmoment Null ist, so lassen sich spezielle Modelle (1) konstruieren, die ein γ -instabiles oder ein triaxiales Potential besitzen.

Unter diesem Hintergrund wäre die Interpretation von Fig.IV.1, dass $^{188}_{78}\text{Pt}$ noch prolat ist und mit wachsender Neutronenzahl ein Übergang zur oblaten Struktur bei $^{196}_{78}\text{Pt}$ stattfindet. $^{188}_{78}\text{Pt}$ und $^{190}_{78}\text{Pt}$ sind dabei in einem Bereich, wo ein fast γ -instabiles oder auch triaxiales Potential vorliegt.

Wie zu erkennen ist, existiert eine Vielzahl von Theorien, die meistens nur spezielle Fälle behandeln. Es ist deshalb interessant zu sehen, wie das generalisierte Modell aus Kapitel (I) die Pt- Os- und W-Kette beschreibt und wie dies mit den speziellen Modellen in Einklang zu bringen ist.

Bevor ich zur allgemeinen Diskussion komme, hebe ich einige Beispiele hervor. Der Zweck hiervon ist, die Grenzen des Modells anzudeuten und die Meinung, dass mit vielen Parametern vieles angepasst werden kann, zu widerlegen.

Mein erstes Beispiel ist $^{186}_{76}\text{Os}$. (Ergebnisse sind in den Figuren IV.2, IV.5, IV.5b und in den Tabellen im Anhang (Os) zu finden.) Es zeigt, dass Theorien mit wenigen Parametern bereits die Grobstruktur des Spektrums wiedergibt, während Mehrparametertheorien nur noch Einzelheiten ändern, aber keine neuen fundamentalen Änderungen mit sich bringt, wie z.B. eine komplette Übereinstimmung zum Experiment. In Fig.IV.2 sind mehrere Modelle (RVM, Gneuss-Greiner-Modell (THEORY II), generalisiertes Modell (THEORY I)) mit dem Experiment verglichen. Hier ist deutlich zu sehen, dass das RVM (ohne RV-Wechselwirkung bereits die Rangfolge der Bandenköpfe und die Lage der niedrigsten Spinzustände

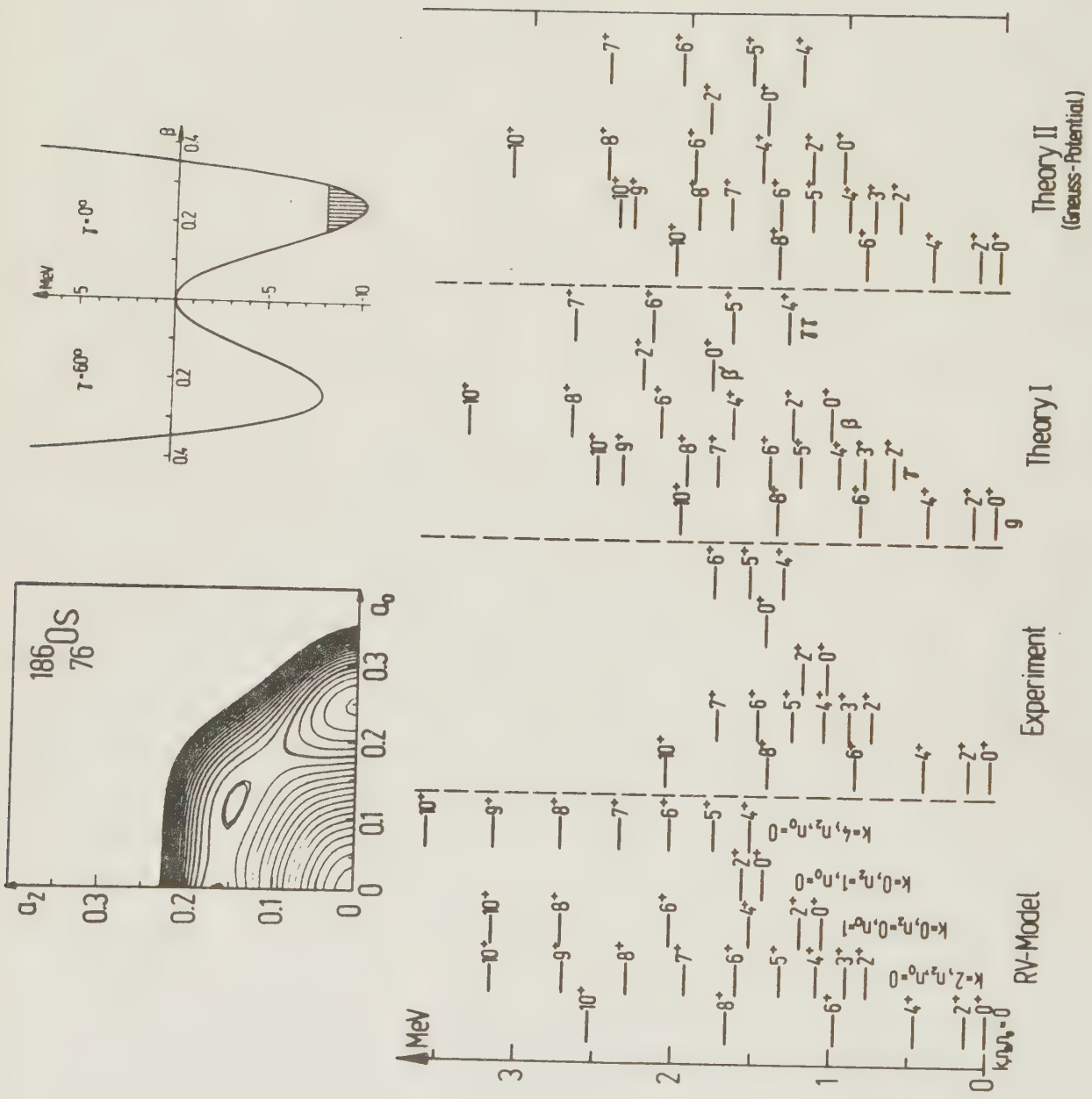


Fig. IV.2

richtig wiedergibt. Das erweiterte Modell hingegen reproduziert zwar den Niederspinanteil nicht so gut wie das RVM, dafür stimmen die Hochspinzustände besser.

Im Kapitel (II) (siehe (II.36-38)) wurde ein einfaches gruppentheoretisches Modell konstruiert, dessen Hamilton-operator gerade

$$H = c_\nu \hat{N} + c_\lambda \hat{A}^2 + c_L \hat{L}^2 \quad (\text{IV.1})$$

mit der Energie

$$E_{\nu\lambda L} = c_\nu \nu + c_\lambda \lambda(\lambda+3) + c_L L(L+1) \quad (\text{IV.2})$$

war. Wird dies auf ¹⁸⁶₇₆Os angewendet, so ist die Übereinstimmung zum Experiment im Niederspinbereich sehr gut (siehe Tabelle IV.1). Hingegen im Hochspinbereich versagt das Modell. Wie ebenfalls in Kapitel (II) gezeigt wurde, liegen bei gleichen c_ν aber verschiedenen c_λ , c_L die selben Wellenfunktionen vor! Die BE2-Werte zwischen den Zuständen sind deshalb gleich, obwohl im Experiment i.a. Unterschiede auftreten! Abhilfe ist nur dadurch zu schaffen, wenn im Quadrupoloperator Parameter eingeführt werden, die einer Veränderung der Ladungsverteilung entsprechen! Damit soll folgendes ausgesagt werden: Liegt ein Modell vor, wo die kollektiven Wellenfunktionen auf einer Gruppenkette konstruiert sind und die verschiedenen Spektren nur durch variieren von Parametern beschrieben werden, wobei die Wellenfunktionen aber gleich bleiben, ist Vorsicht geboten. Sie beschreiben zwar den Niederspinanteil mit wenigen Banden ganz gut, aber schon die Tatsache, dass bei den BE2-Werten die obigen Schwierigkeiten auftauchen, lassen darauf schliessen, dass noch zu wenig "Physik" in dem Modell steckt. Die Beschreibung ist zu mathematisch! Dieses Bei-

spiel zeigt aber auch, dass mit wenigen Parametern und zu wenig experimenteller Information eine scheinbar gute Übereinstimmung zu erzielen ist. Unterschiede zwischen den Modellen sind erst unter Hinzunahme von Hochspinzuständen und/oder mehrerer Nebenbanden zu finden. Nur so lassen sich die Fähigkeiten und Grenzen der Modelle vergleichen und austesten. Insbesondere wenn ein Modell ein reines $L(L+1)$ -Gesetz innerhalb einer Bande vorhersagt, ist es noch nicht vollständig, da die Hochspinzustände im Experiment ganz klar von diesem Verhalten abweichen!

Tabelle IV.1

$$C_D = 0.531 \text{ MeV}, C_\lambda = 0.025 \text{ MeV}, C_L = 0.023 \text{ MeV}$$

L	N=0 $\lambda=0$	N=1 $\lambda=0$	N=1 $\lambda=1$	N=3 $\lambda=3$	
0	0.	1.062 (1.061)	.	2.043 (1.456)	Theorie (Experiment)
2	0.138 (0.137)	1.200 (1.208)	0.769 (0.768)		
3	∅	∅	0.907 (0.910)		
4	0.460 (0.434)	1.522	1.091 (1.071)		
5	∅	∅	1.221 (1.276)		
6	0.966 (0.869)	2.028	1.597 (1.491)		
7	∅	∅	1.919 (1.752)		
8	1.656 (1.421)	1.759	2.287		
9	∅	∅	2.701		
10	2.530 (2.070)	3.592	3.161		

Das nächste Beispiel ist $^{194}_{78}\text{Pt}$, dessen Ergebnisse in den Figuren IV.3, IV.4, IV.4e und in den Tabellen im Anhang (Pt) zusammengefasst sind. In Fig. IV.3 ist deutlich zu erkennen, dass das RVM bei weitem nicht so gut das Spektrum reproduziert, wie es beim generalisierten Modell der Fall ist. Dies ist einleutend, wenn man die PES betrachtet. Bei $^{186}_{74}\text{Os}$

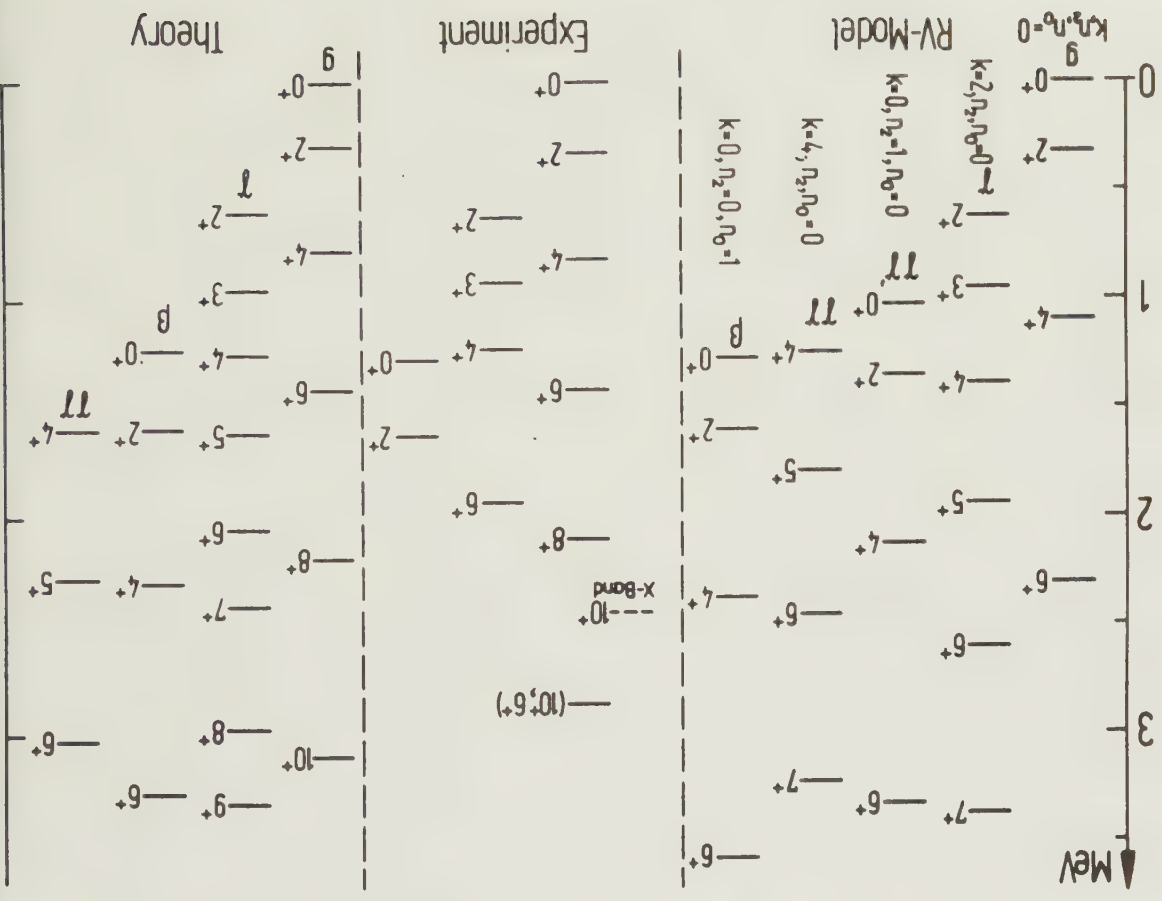
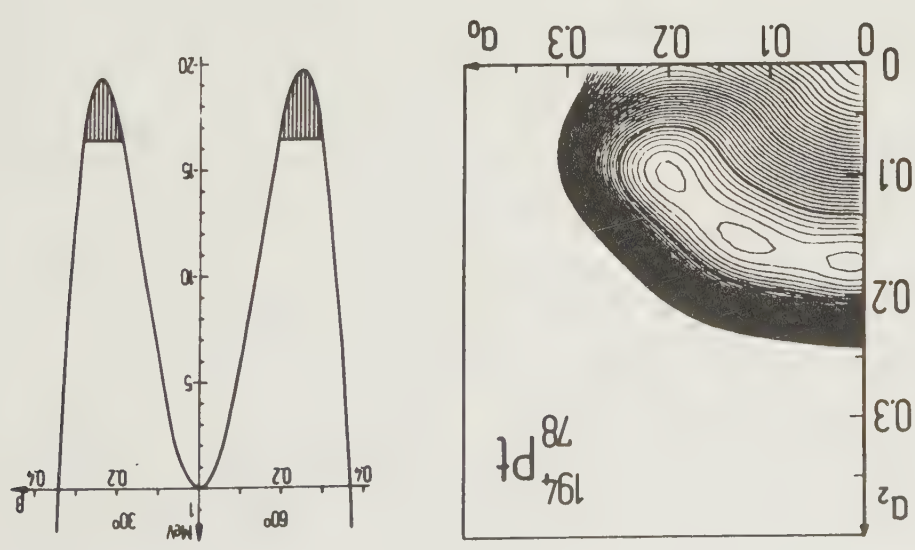


Fig. IV.3

liegt ein wohl definiertes Minimum auf der prolaten Achse vor, das sicher gut durch ein Oszillatorpotential um $=0$ zu approximieren ist. Eine gute Übereinstimmung ist deshalb zu erwarten. Bei $^{194}_{78}\text{Pt}$ hingegen liegt ein γ -weiches oblates Minimum vor, das nicht mehr ganz so gut durch einen Oszillator um $\beta \neq 0$ angenähert werden kann, die Übereinstimmung also schlechter wird.

Das Hauptinteresse dieses Beispiels liegt aber wo anders: Im experimentellen Spektrum ist ein 10^+ -Zustand (gestrichelt) zu erkennen, der nicht durch das kollektive Modell erklärt werden kann. Der Abstand $8^+_1 - 10^+_1$ ist kleiner als der von $6^+_1 - 8^+_1$. Dieses "backbending" in der YRAST-Bande wird durch das Kreuzen zweier Banden erklärt: Die kollektive Grundzustandsbande kreuzt mit einer Bande, die hauptsächlich Einteilchencharakter hat. Auf Grund der Corioliskraft entkoppeln zwei Nukleonen und richten sich linear zum maximalen möglichen Drehimpuls aus. Auf diesem Zustand wird die kollektive Rotation noch hinzuaddiert, sodass eine neue Bande entsteht (32,35). Im Experiment (30,32,35) wurde weiterhin ein Zustand gemessen, der eventuell zur Grundzustandsbande gehört. Ist dies der Fall, so handelt es sich um einen 10^+ -Zustand. Die Auswertung ist allerdings noch nicht so weit gediehen, um eine eindeutige Aussage machen zu können. Die Lage dieses Zustandes ist in der gleichen Gegend wie der im Modell vorhergesagte, obwohl durch die Wechselwirkung mit der entkoppelten Bande er etwas verschoben ist.

Der 10^+ -Zustand mit meistens Einteilchencharakter kann nicht angenähert werden, so viel Parameter das Modell auch zur Verfügung hat. Anders wäre es, wenn ein kollektives Modell vorläge, das nur die YRAST-Bande erklären will. In einem solchen Fall würde eine Entwicklung in $L(L+1)$ genügen:

$$E = AL(L+1) + B(L(L+1))^2 + \dots$$

Dies ist aber ein reiner Polynomfit, mit dem die YRAST-Bande garantiert reproduziert werden kann. Hier hängt die Qualität des Fits direkt mit der Anzahl der Parameter zusammen. Werden Nebenbanden mitgenommen, so liegt kein Polynomfit mehr vor. Nur Zustände mit grösstenteils kollektiven Charakters sind durch das generalisierte Modell zu reproduzieren. Es könnte zwar durch Veränderung der Parameter Zustände mit einem merklichen Anteil von Einteichencharakter simuliert werden, aber nur auf Kosten der allgemeinen Übereinstimmung zum Experiment.

Das generalisierte Modell mit seinen vielen unbekannten Konstanten soll auch dazu dienen wieviel Zustände durch ein rein kollektives Modell interpretiert werden können. Das Ausloten der Fähigkeiten des Modells ist deshalb ein Grund für die Verwendung vieler Parameter und nicht der Versuch das Spektrum perfekt anzupassen. Vielparametrige Modelle können also die Grobstruktur, die bereits bei Modellen mit wenigen Parametern erreicht wird, nicht fundamental ändern, aber die Feinstruktur verbessern, insbesondere den Hochspinanteil. Ein grosser Vorteil liegt aber in der Allgemeinheit des in Kapitel (I) konstruierten Modells, in dem alle Spezialfälle enthalten sind.

(b) Allgemeine Diskussion

Die Anpassung der Spektren in der Pt-, Os- und W-Kette wurde bei $^{186}_{76}\text{Os}$ gestartet. Die Potentialfläche und die Massenparameter, die dabei herauskamen, wurden als Start zur Anpassung benachbarter Isotope benutzt. Mit diesem Verfahren wurden alle drei Isotopenketten angepasst. In den Figuren IV.4, IV.5 und IV.6 sind die konstruierten PES der Pt-, Os- und W-Isotope nacheinander angegeben. Die dazugehörigen

Spektren sind in den Figuren IV.4a-f, IV.5a-e und IV.6a-d angegeben und die numerischen Ergebnisse wie Energien, BE2-Werte und Quadrupolmomente bis $L=10$ und Koeffizienten sind aus Anhang (Pt), (Os) und (W) zu ersehen.

(α) Pt-Isotope

Die Doppellinie in den PES zeigt die Ausbreitung der Grundzustandswellenfunktion an. Die PES der Pt-Isotope zeigen einen Übergang vom oblaten bei $^{196}_{78}\text{Pt}$ zum fast γ -instabilen Charakter bei $^{190}_{78}\text{Pt}$. Allerdings ist er nicht vollständig γ -instabil; ein prolates und oblates Minimum haben sich schwach ausgebildet. Diese beiden Minima sind bei $^{188}_{78}\text{Pt}$ vollständig getrennt. Die Ursache für das oblate Minimum dürfte der erste angeregte 0^+ -Zustand sein, der bei kleinen Neutronenzahlen zu niedrigeren Energien stark absinkt, während der 2^+ -Zustand der γ -Bande mehr oder weniger seine Position beibehält.

Deutlich wird der Sachverhalt, wenn die Quadrupolmomente des 2^+_{γ} - und 2^+_{β} -Zustandes betrachtet werden:

$$Q(2^+_{\gamma}) = -1.765 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_{\beta}) = +1.576 \text{ eb}$$

Der Grundzustand ist also dominierend prolat, während der 2^+_{β} -Zustand anscheinend oblat ist, er also als isomerer Zustand zu betrachten ist, dessen Wellenfunktion sich hauptsächlich im oblaten Minimum aufhält.

Beim Betrachten der PES in Fig. IV.4 wird deutlich, weshalb vereinfachte spezielle Modelle, die γ -instabile oder triaxiale Potentiale annehmen, die Spektren der Charakteristik nach gut beschreiben können. $^{190}_{78}\text{Pt}$ zum Beispiel kann sehr gut durch ein γ -instabiles Potential beschrieben werden, während $^{196}_{78}\text{Pt}$ eher durch ein triaxiales Potential beschrieben wird, obwohl auf Grund der γ -Weichheit auch ein

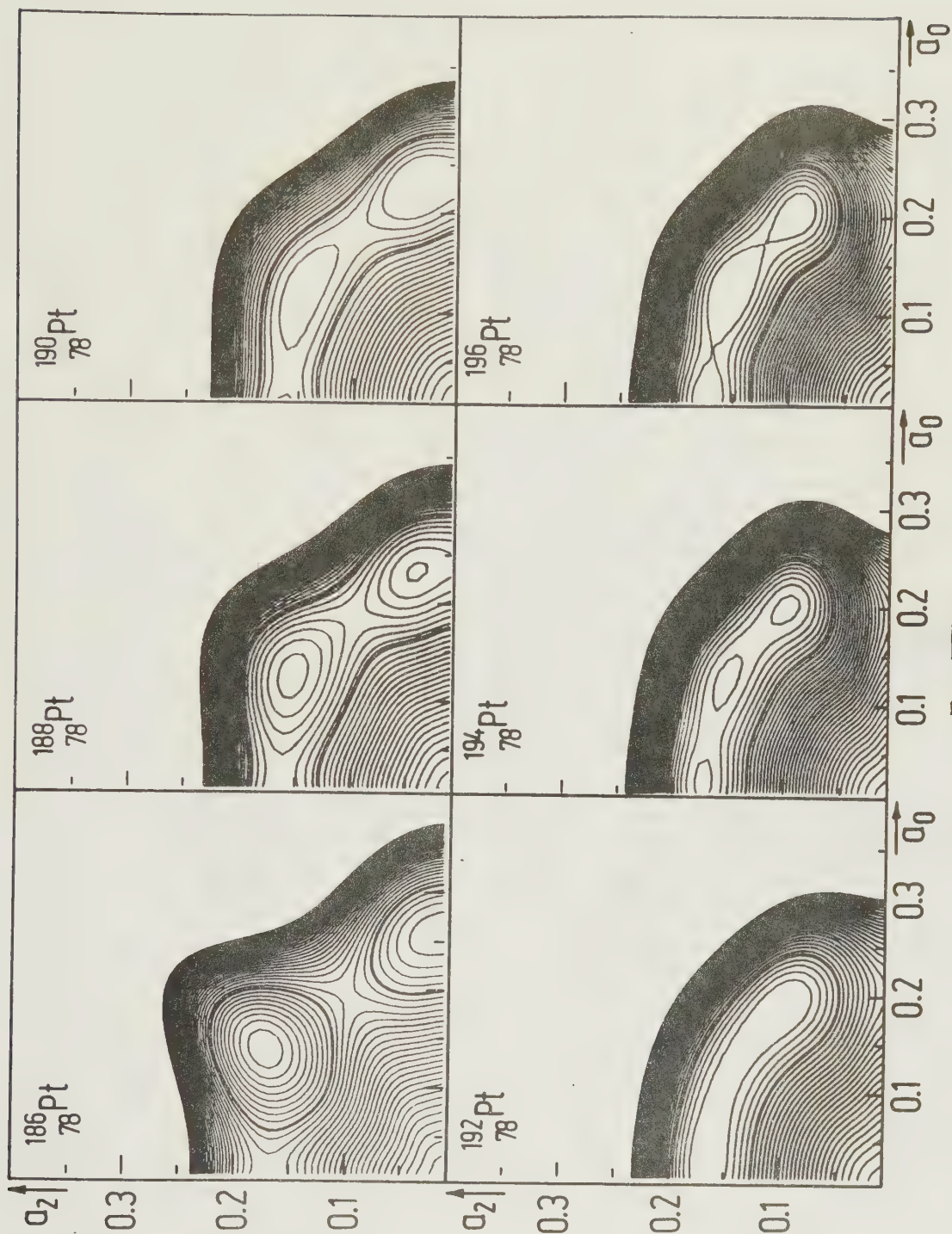


Fig. IV.4

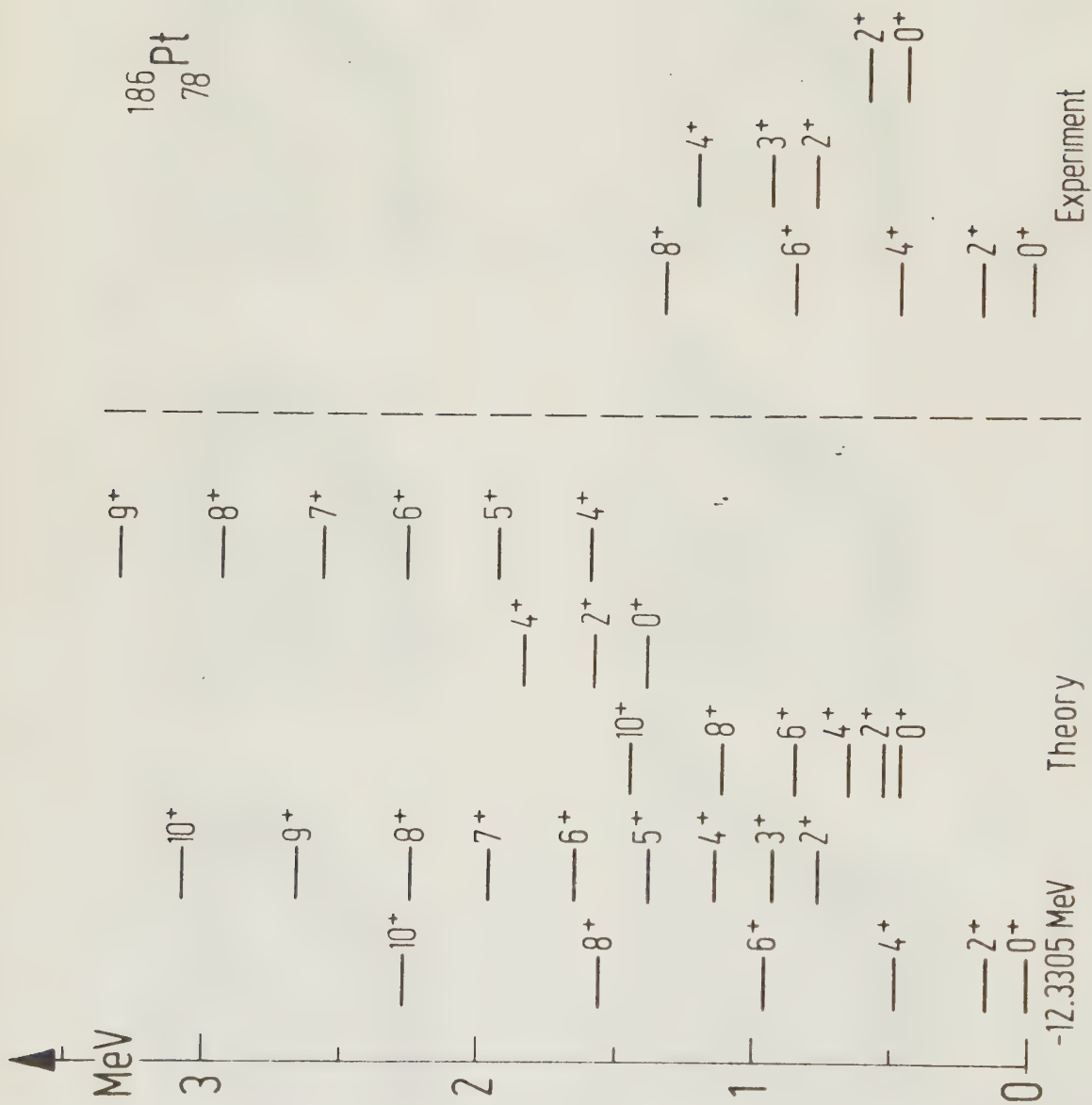


Fig. 12.4a

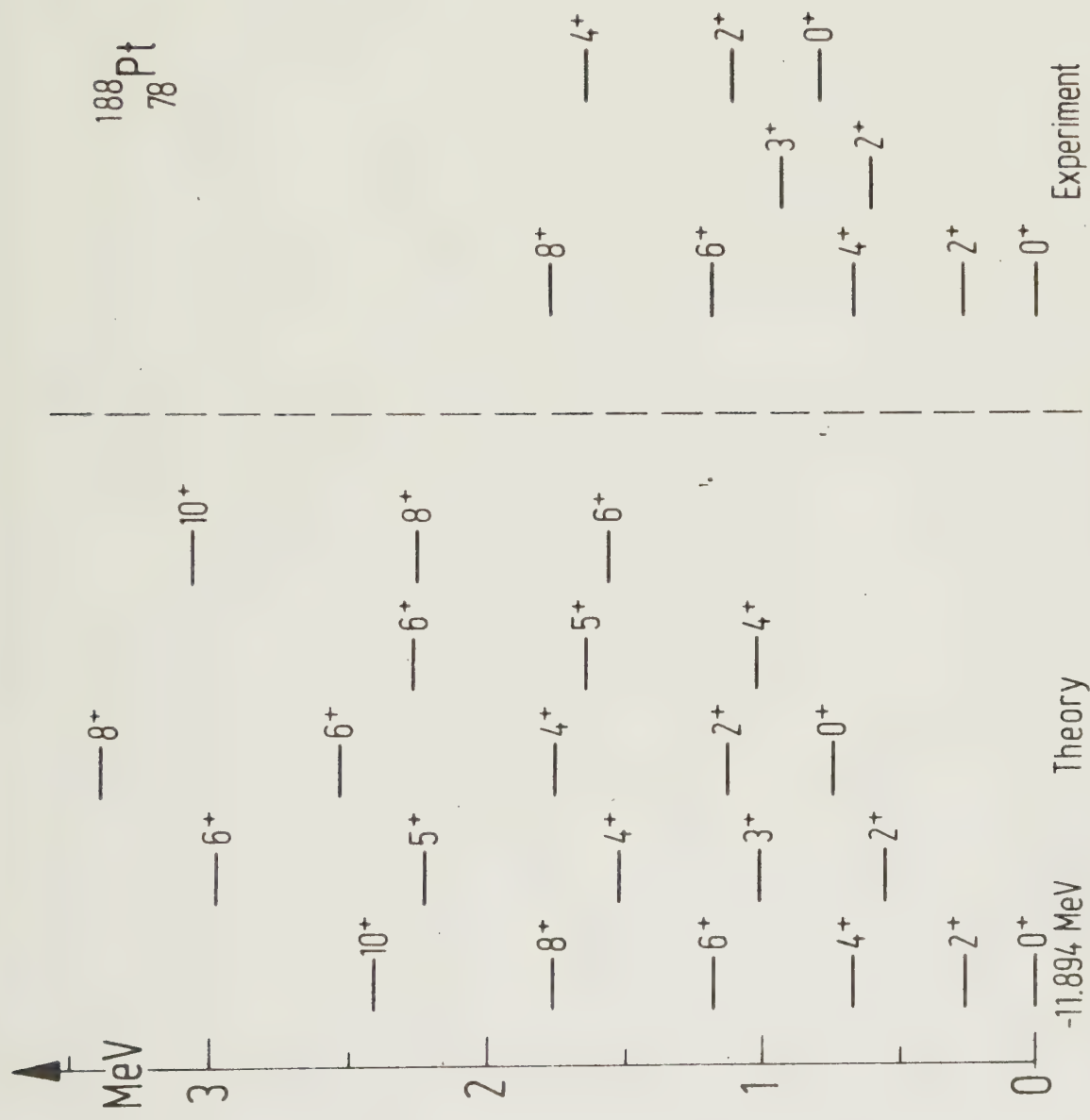


Fig. IV.4b

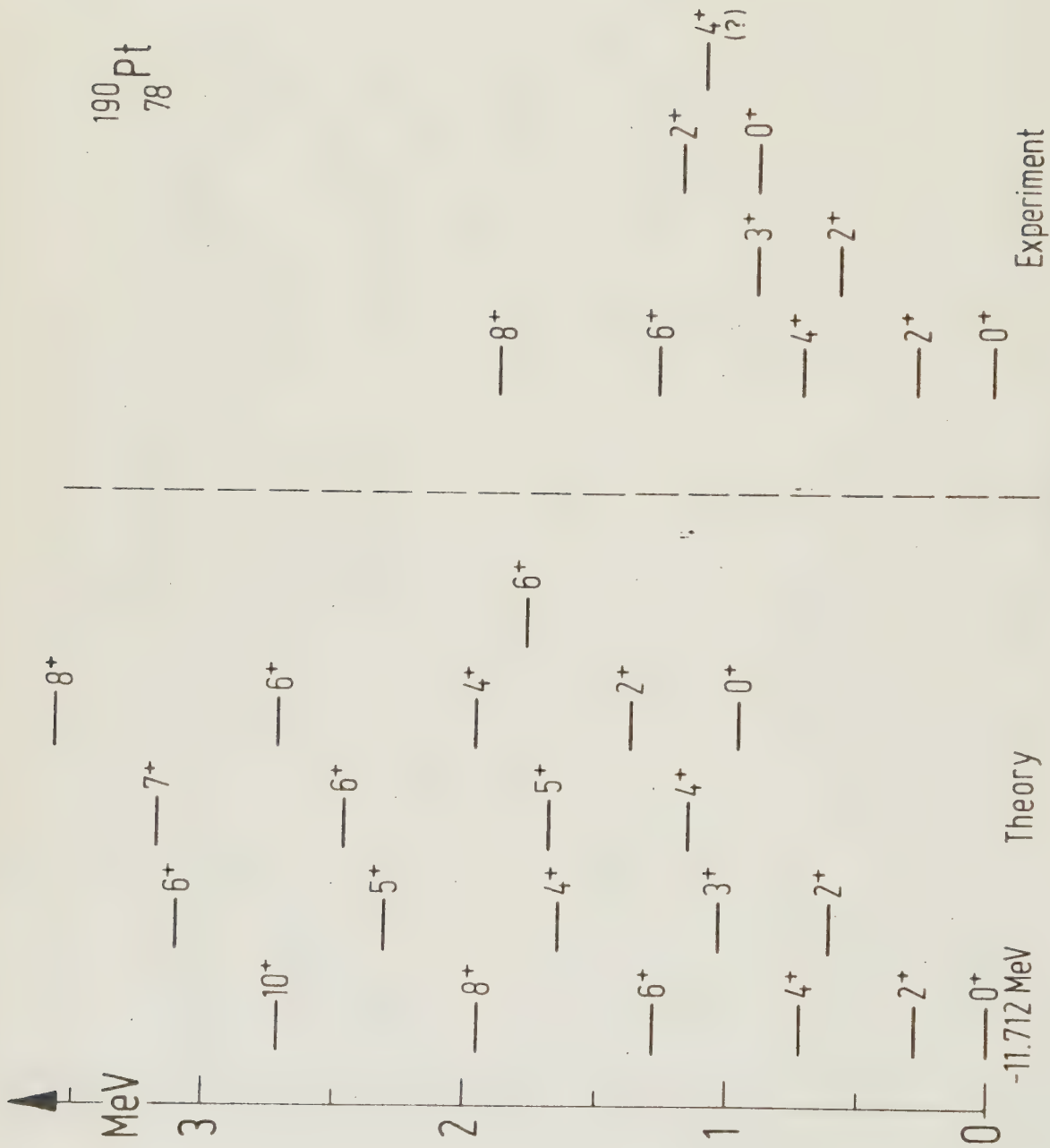


Fig. IV.4c

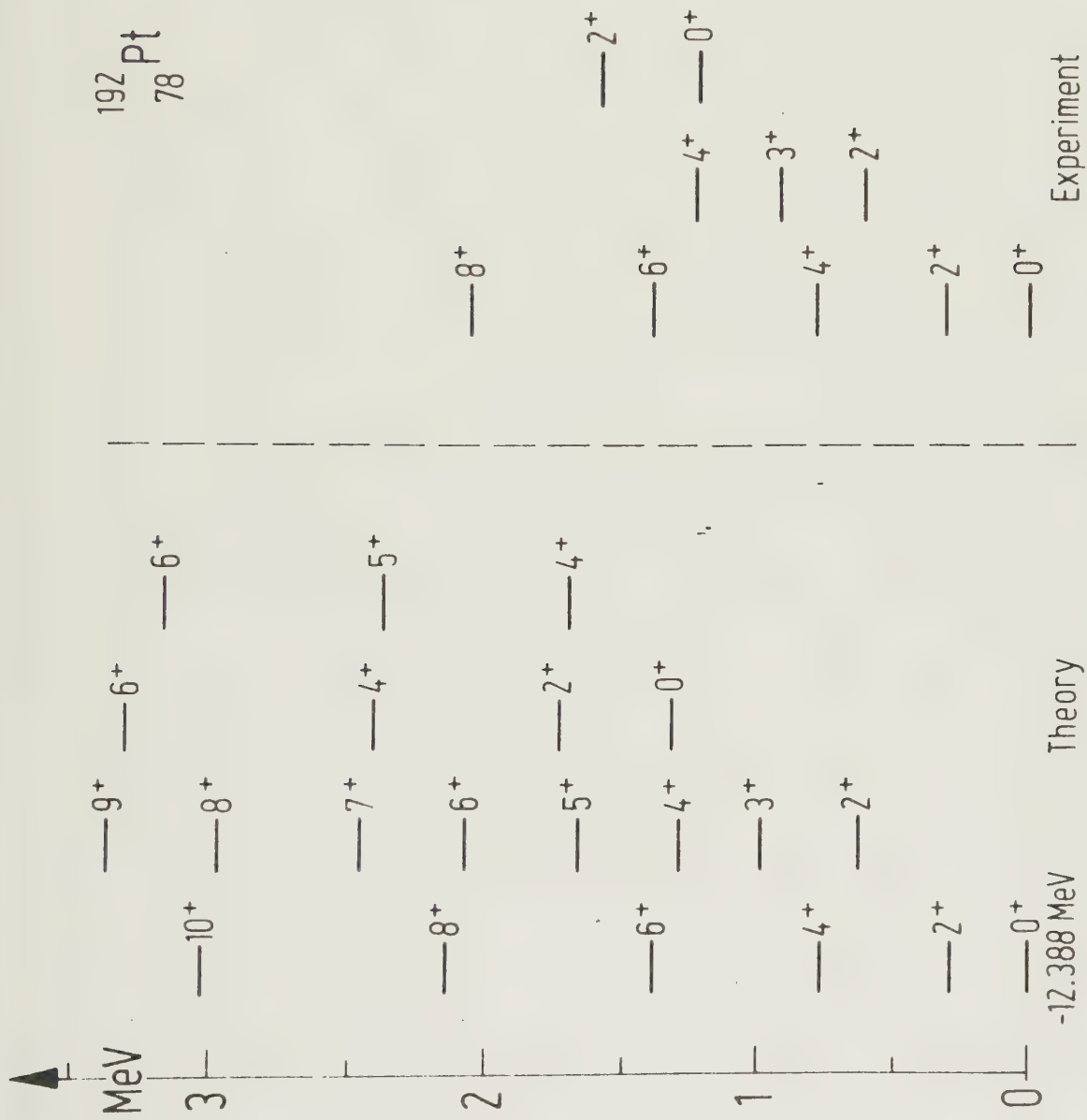


Fig. IV.4d

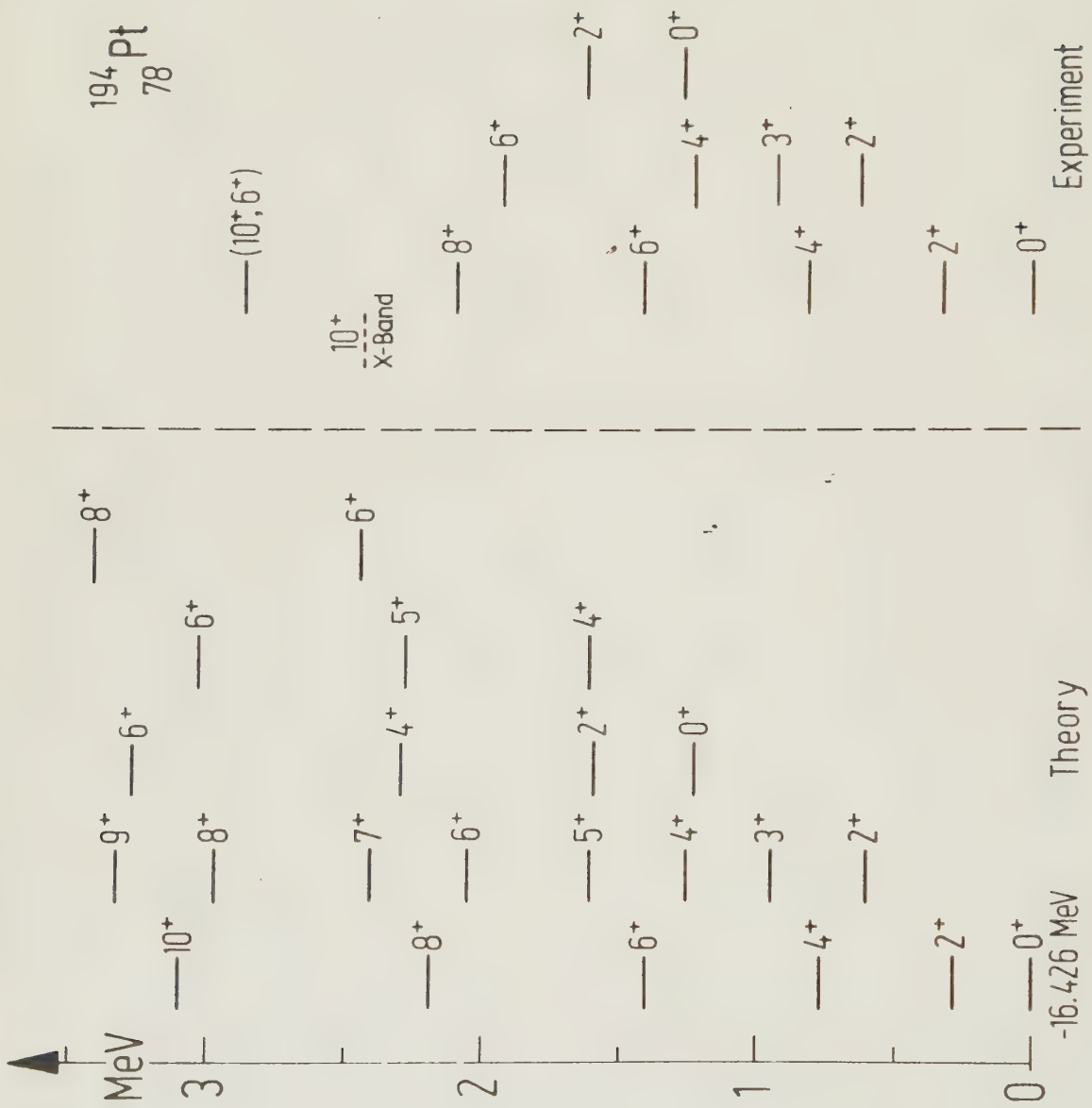


Fig. IV.4e

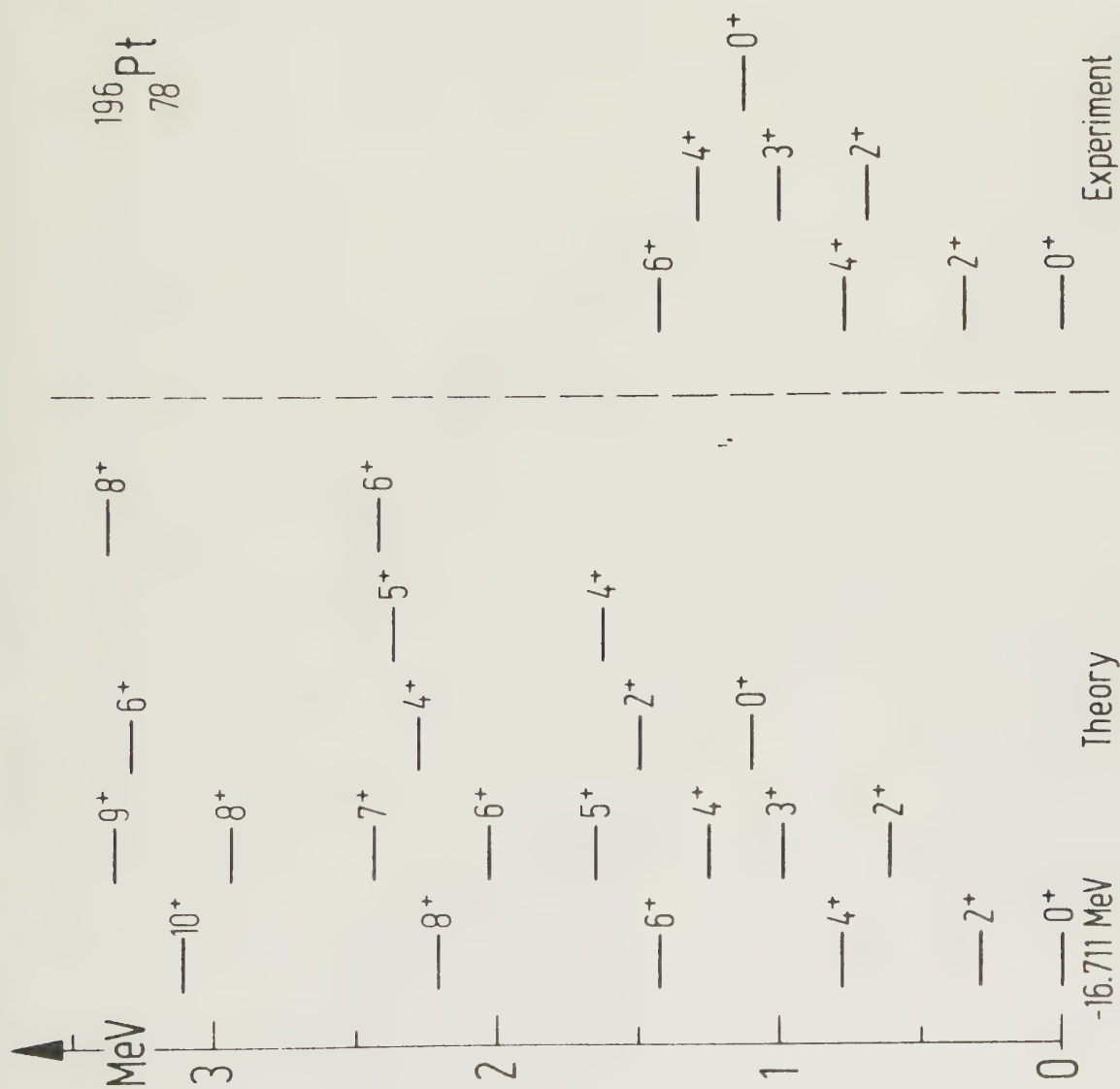


Fig. IV.4f

γ -instabiles Potential angebracht wäre.

Bereits hier lässt sich die Universalität des generalisierten Modells erkennen: Beide Fälle (γ -instabiles bzw. triaxiales Minimum) sind im Modell enthalten, während bei den speziellen Modellen ein Übergang von einem zum anderen gemacht werden muss!

(β) Os-Isotope

Bei der Os-Kette ist schliesslich etwas Ähnliches zu beobachten. Hier ist $^{192}_{76}\text{Os}$ nicht oblat sondern fast triaxial mit einer Neigung zur prolaten Achse. Das Minimum zieht sich mit sinkender Neutronenzahl zur prolaten Achse zusammen, während auf der oblaten Achse das Verhalten der PES immer flacher wird, bis schliesslich bei $^{186}_{76}\text{Os}$ sich ein oblates Minimum auszubilden beginnt, das bei $^{184}_{76}\text{Os}$ voll vom prolaten getrennt ist. Ein Vergleich zur Pt-Kette ist hier angebracht: Bei $^{186}_{78}\text{Pt}$, das über $^{184}_{78}\text{Os}$ liegt, sind ebenfalls zwei Minima zu erkennen. Beide Ergebnisse wurden über zwei verschiedene Wege erzielt. $^{186}_{78}\text{Pt}$ wurde aus $^{186}_{76}\text{Os}$ über $^{186}_{76}\text{Pt}$ erreicht und $^{184}_{76}\text{Os}$ direkt aus $^{186}_{76}\text{Os}$.

(β) W-Kette

Zur W-Kette ist nicht viel zu sagen. Zu Anfang sind bei $^{186}_{74}\text{W}$, $^{184}_{74}\text{W}$ noch zwei Minima vorhanden. Dies ist eine konsequente Fortsetzung der Os- und Pt-Isotope, die über $^{186}_{74}\text{W}$ und $^{184}_{74}\text{W}$ liegen. Beim Betrachten der Spektren (IV.6c-d) ist der experimentelle Grund zu finden: Zwei angeregte 0^+ -Zustände sind sehr dicht beieinander. Eine Eigenheit des Modells ist, dass es in solchen Fällen, wo der Abstand zwischen $0_2^+ - 0_3^+$

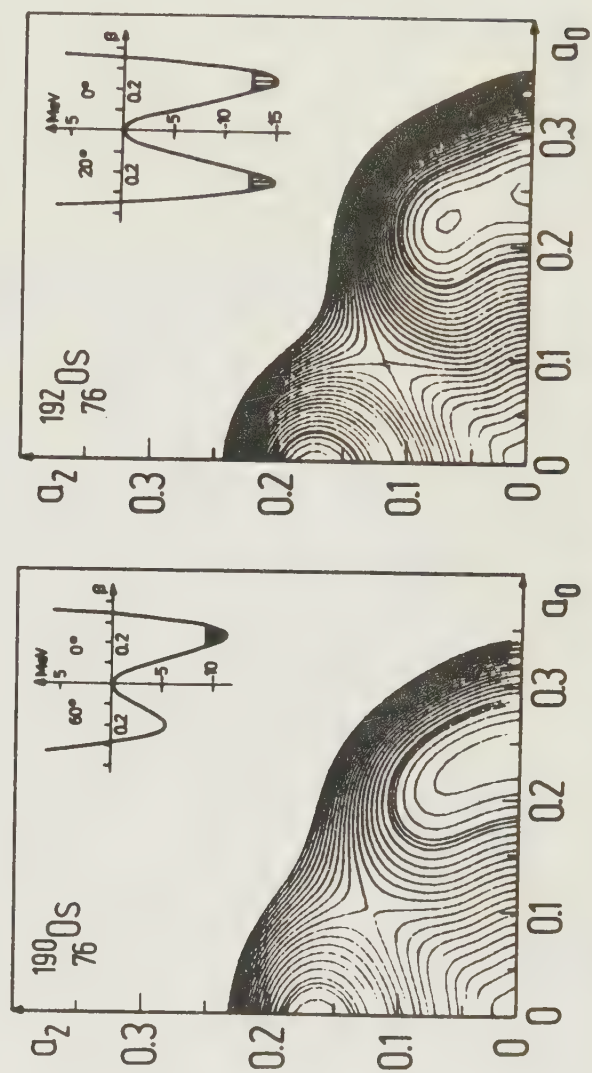
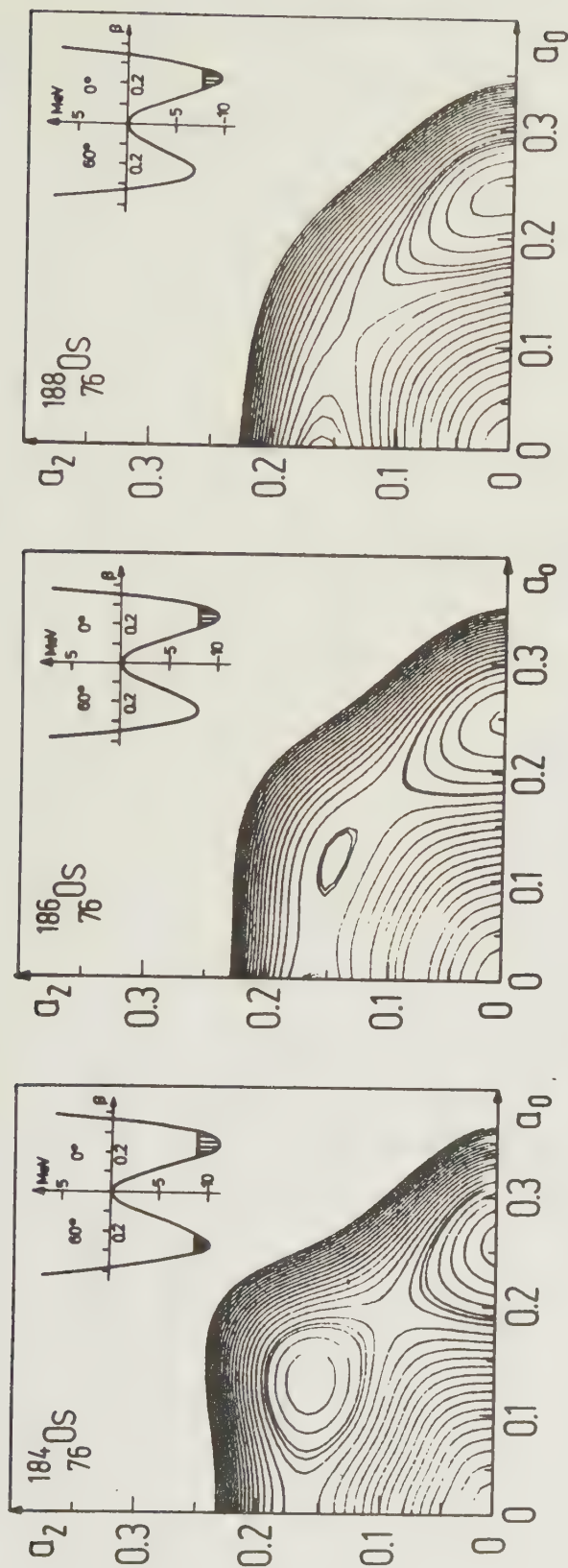


Fig. IV.5

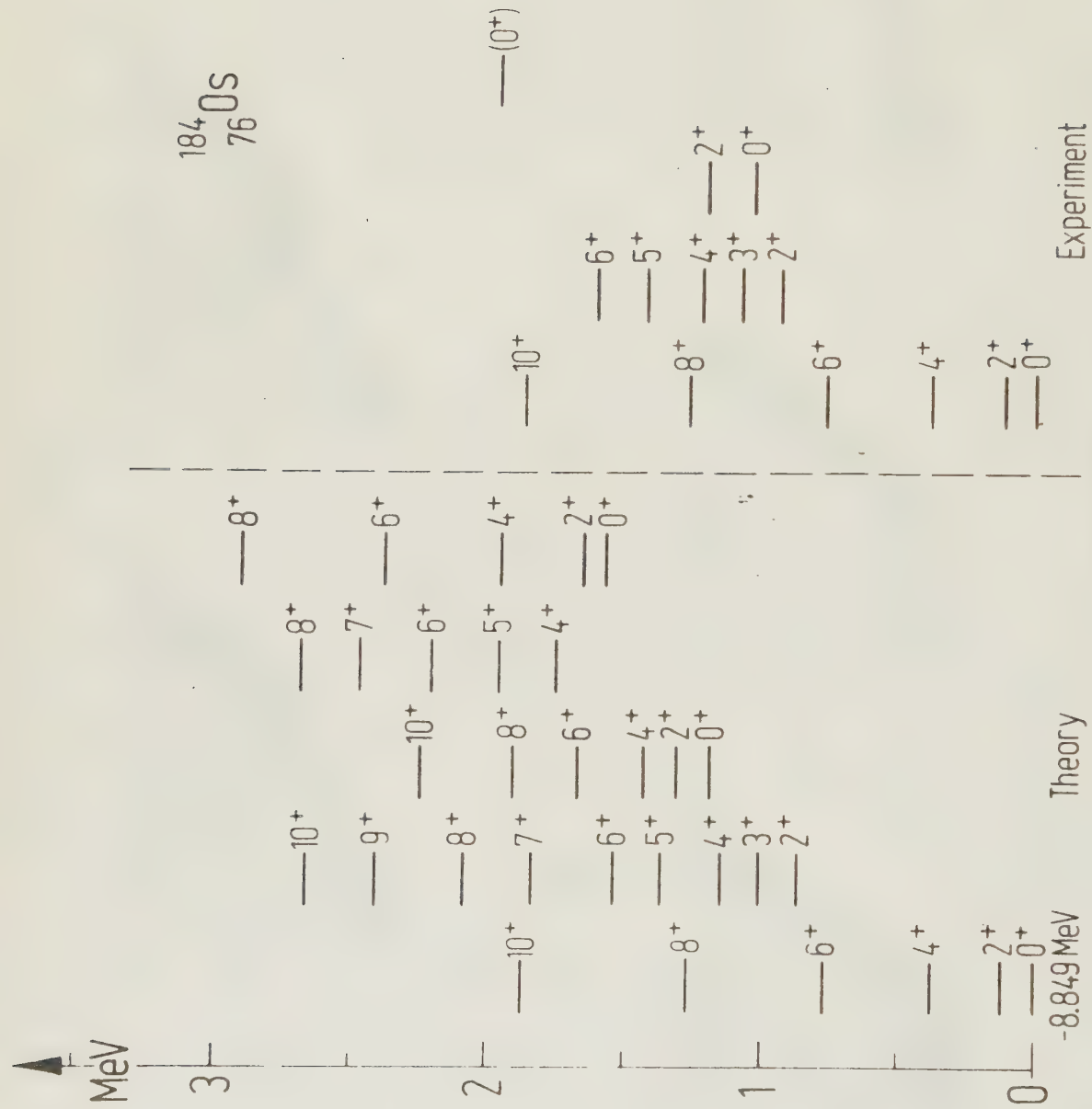
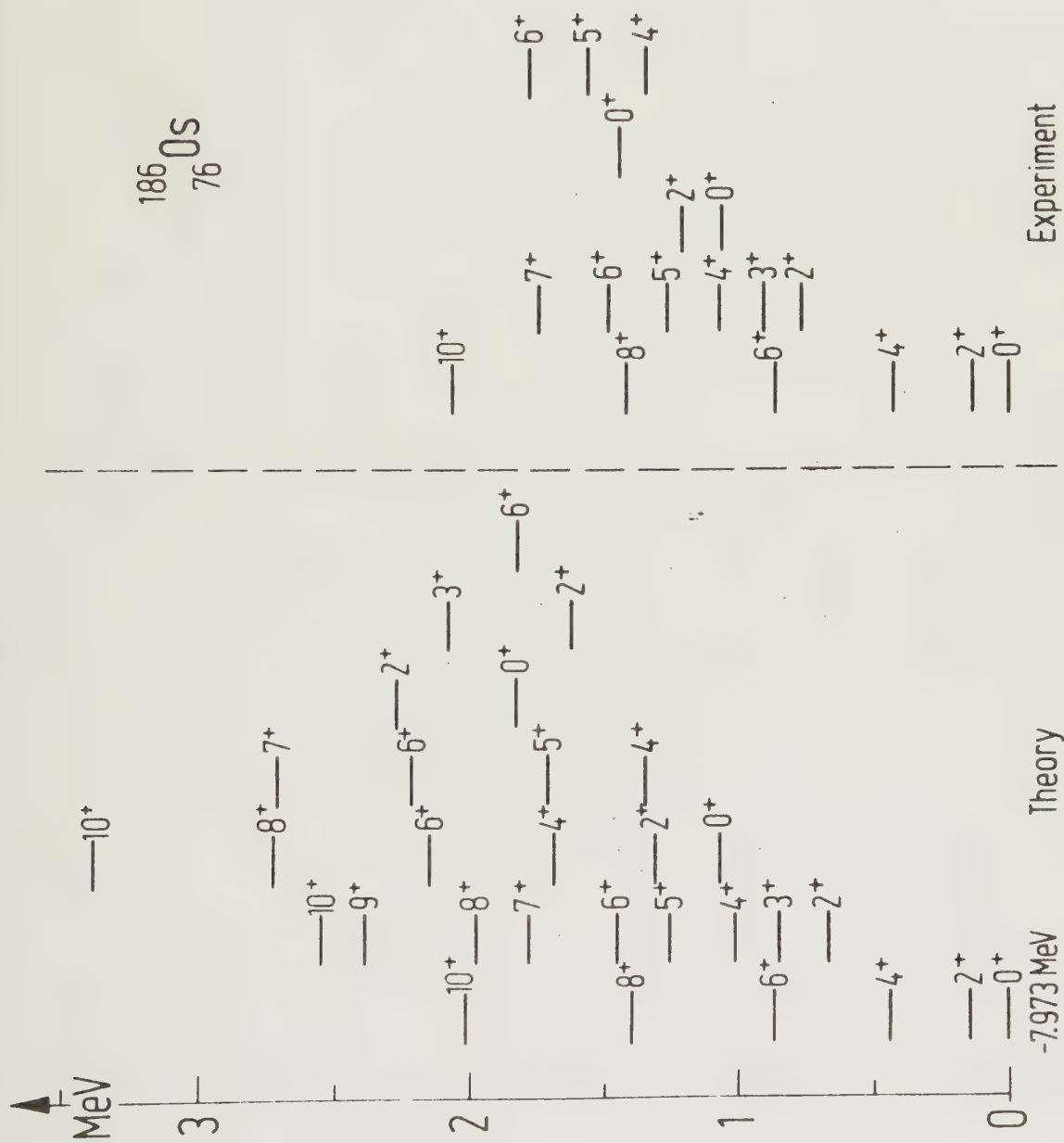


Fig. IV.5a

$^{186}_{76}\text{Os}$



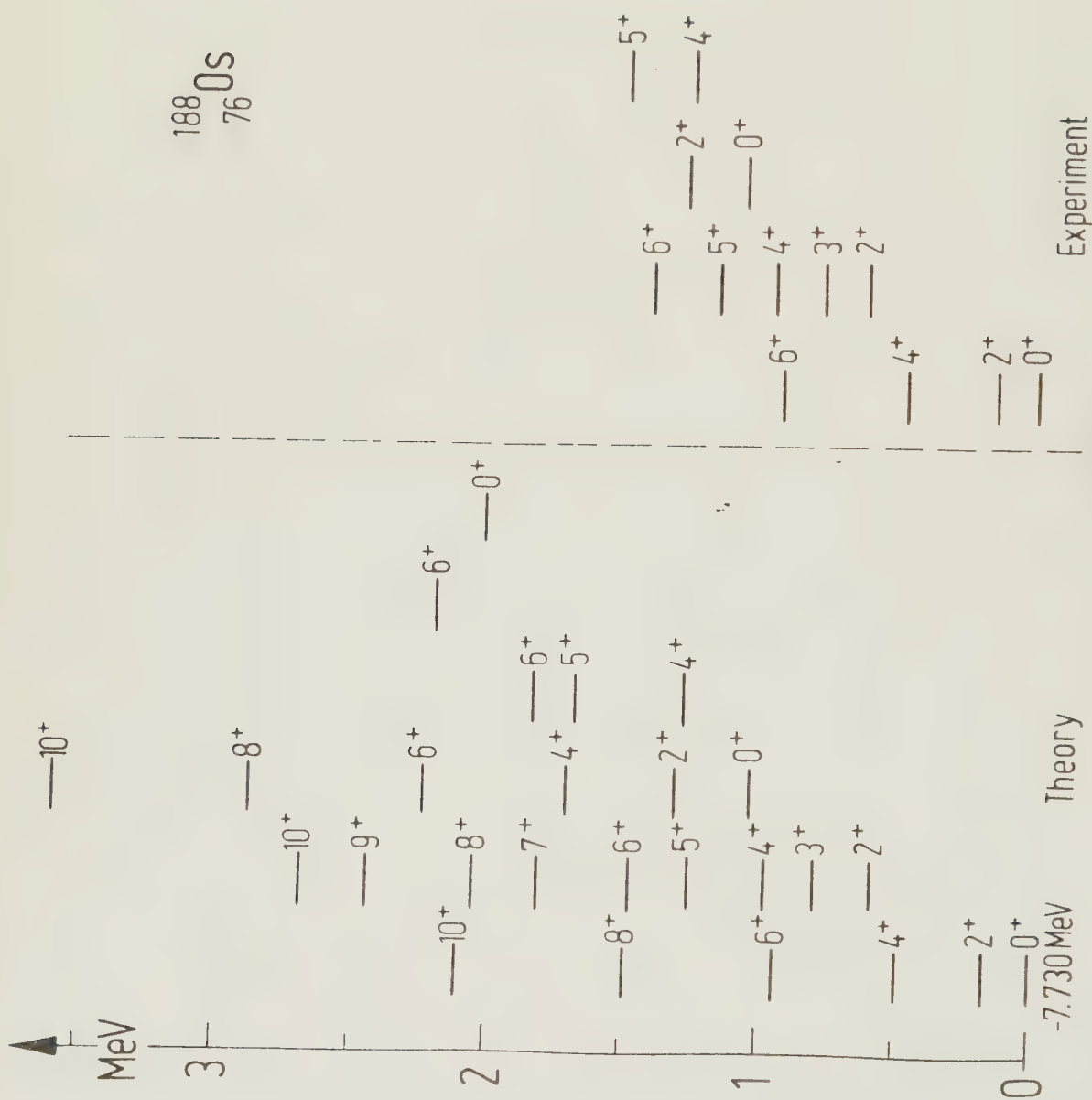
Experiment

Theory

Fig. IV.5b

-7.973 MeV

$^{188}_{76}\text{Os}$



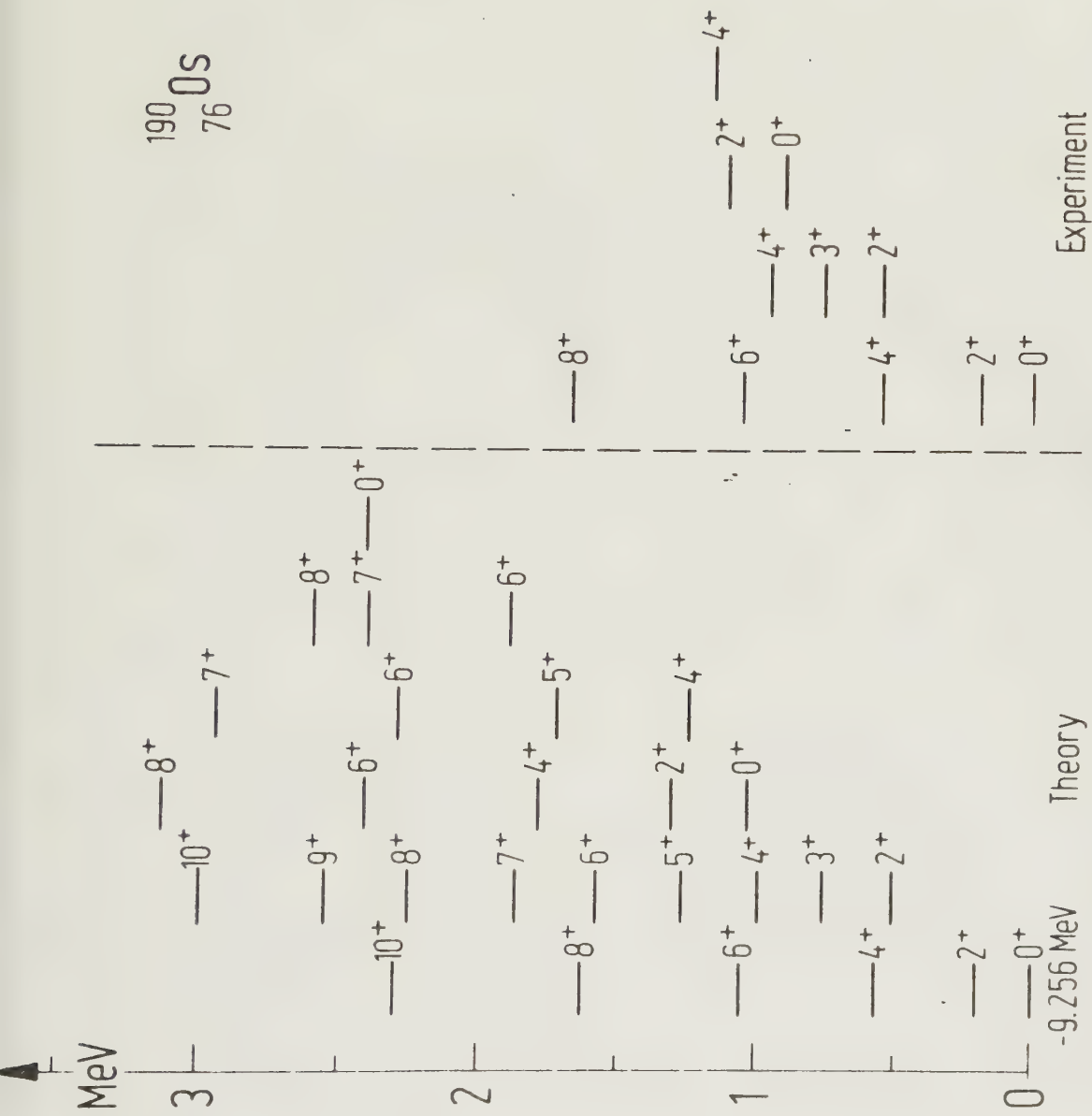


Fig. IV.5d

$^{192}_{76}\text{Os}$

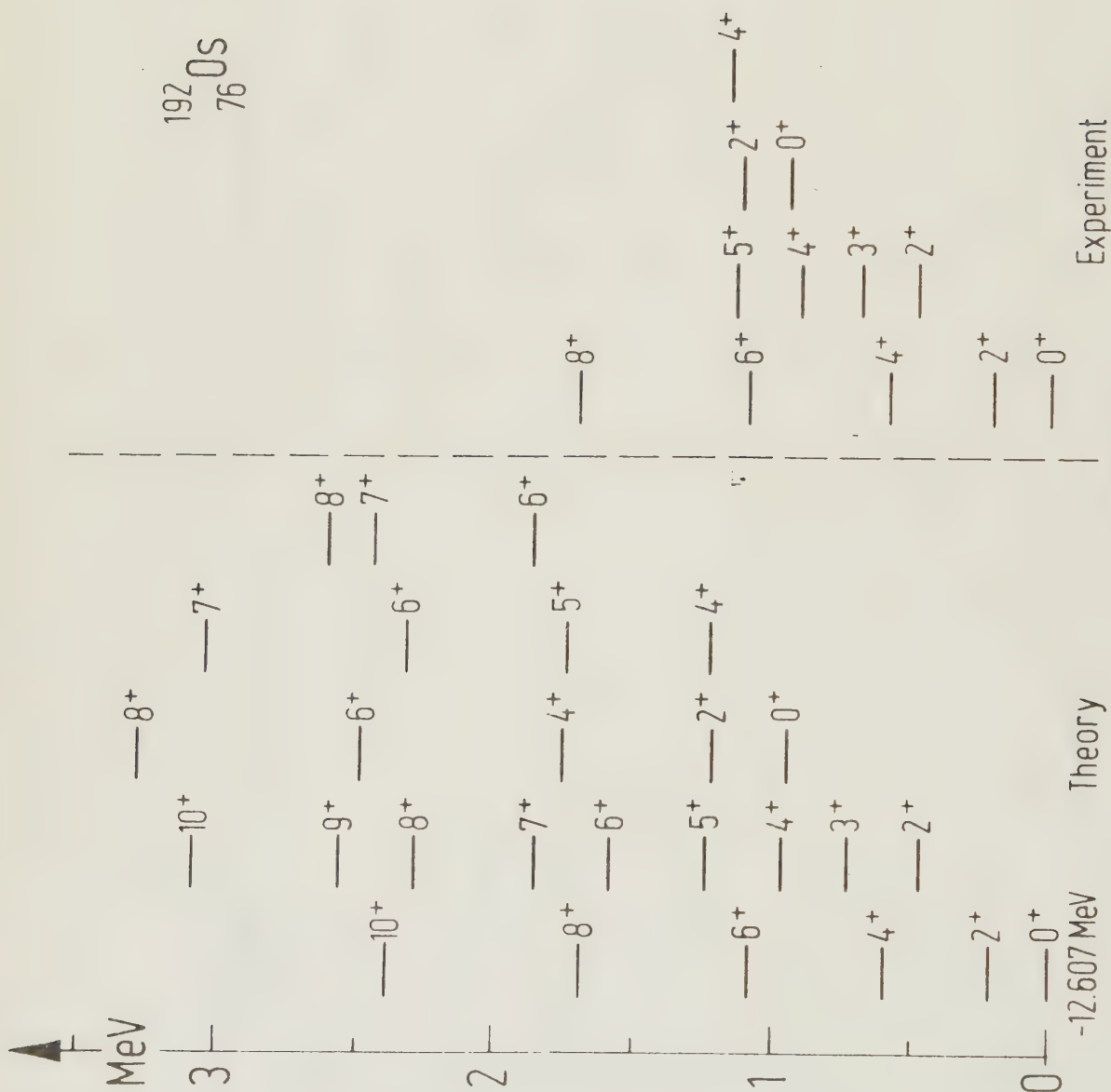


Fig. IV. 5e

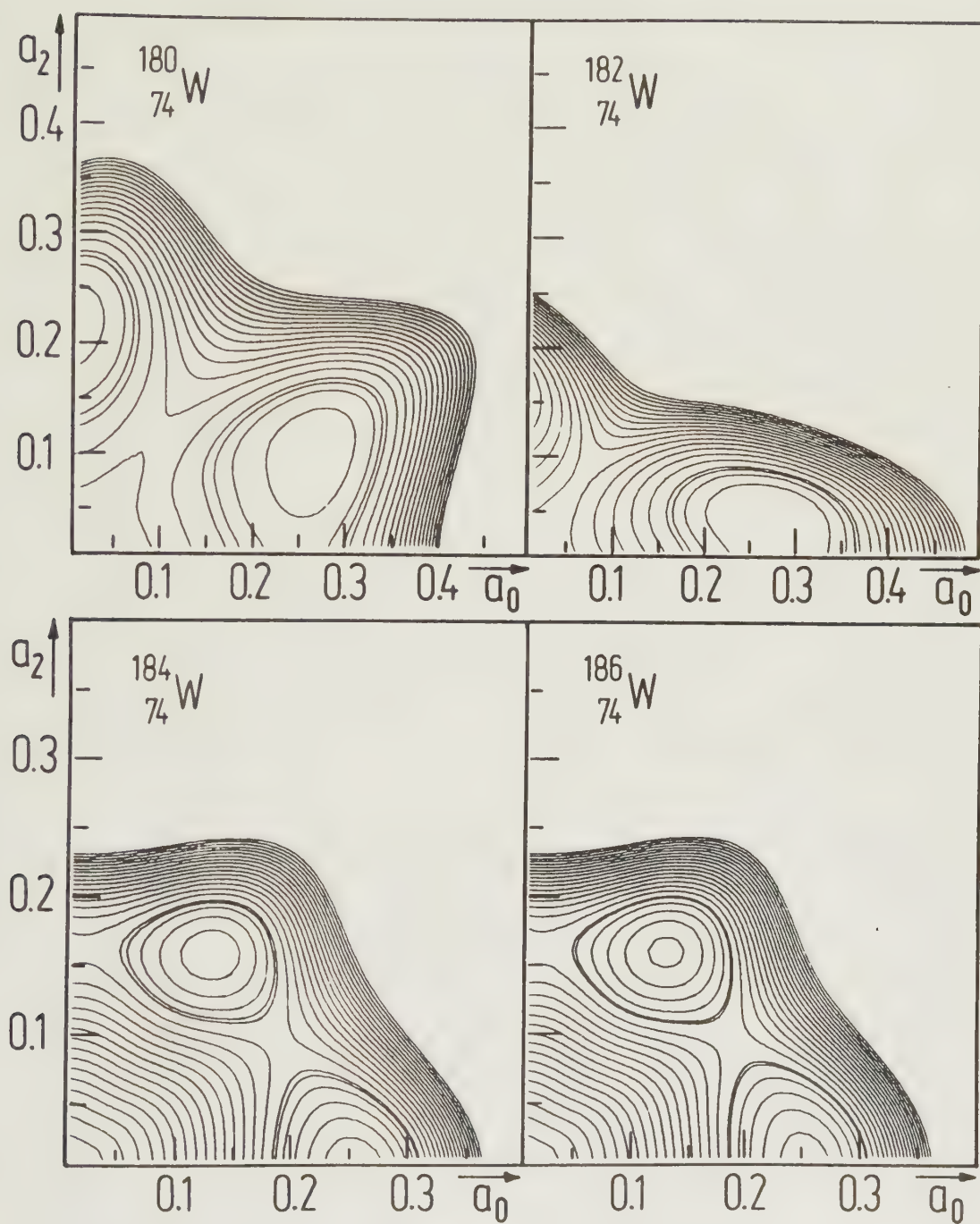


Fig. IV.6

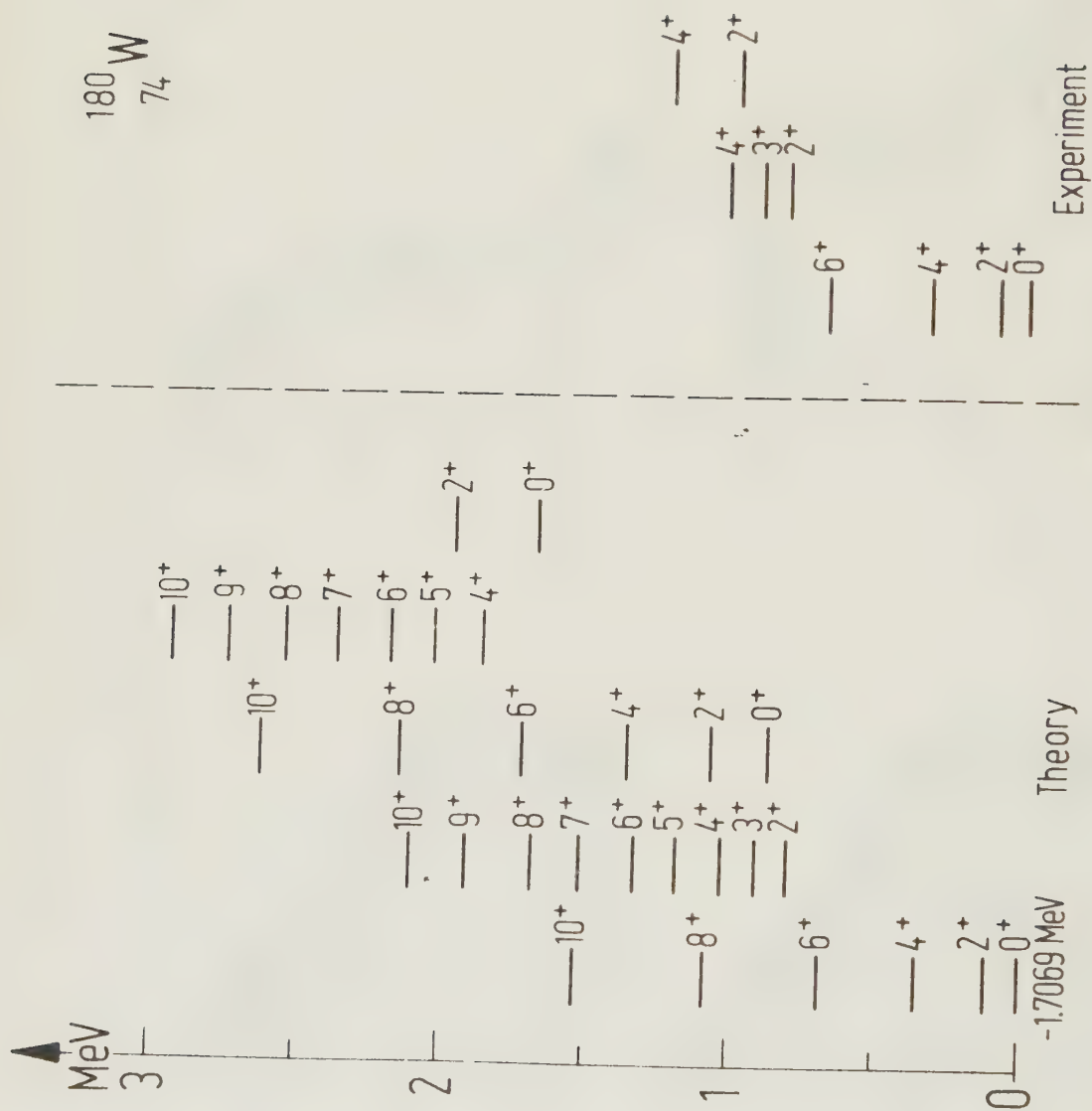
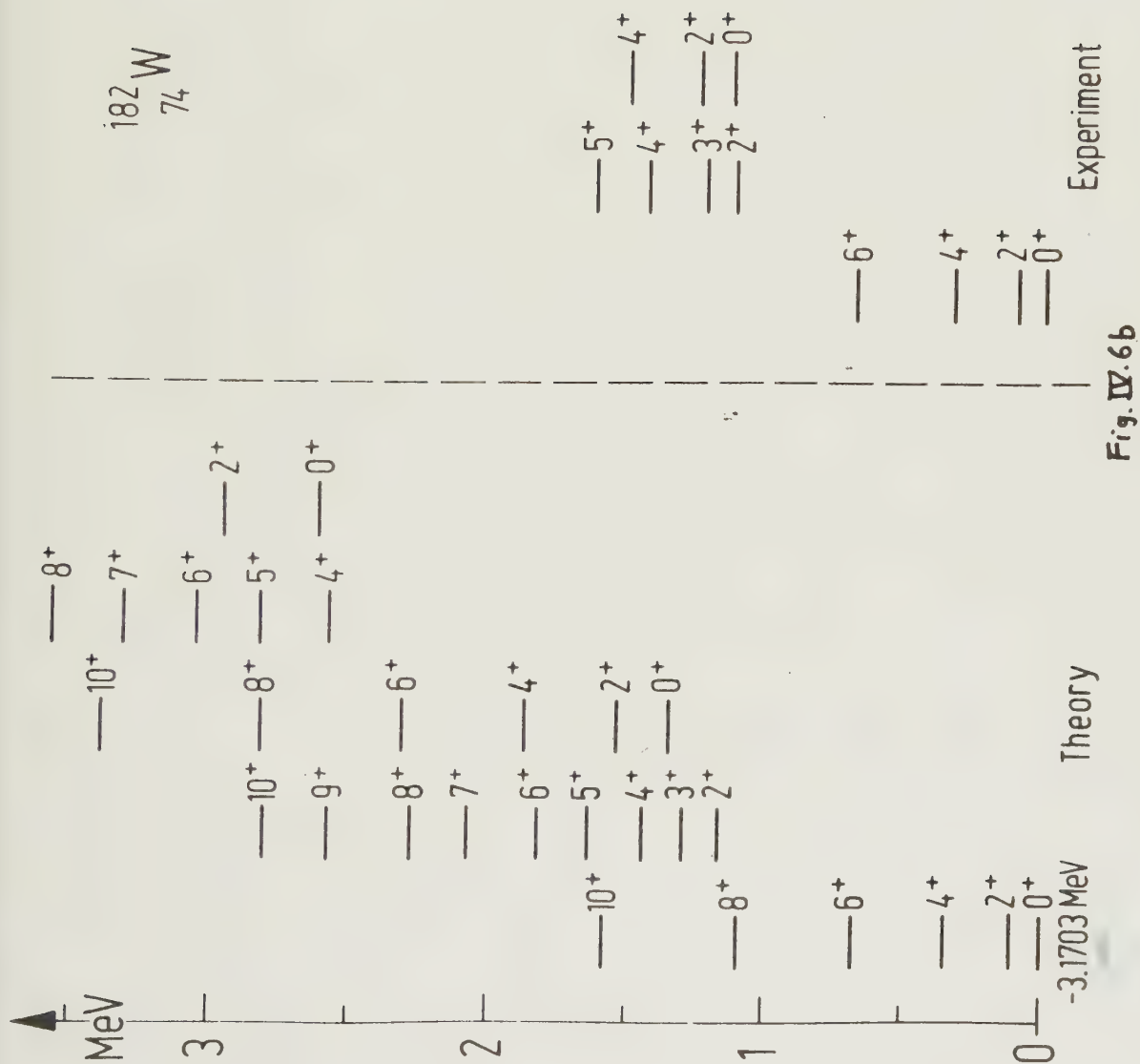


Fig. D.6a



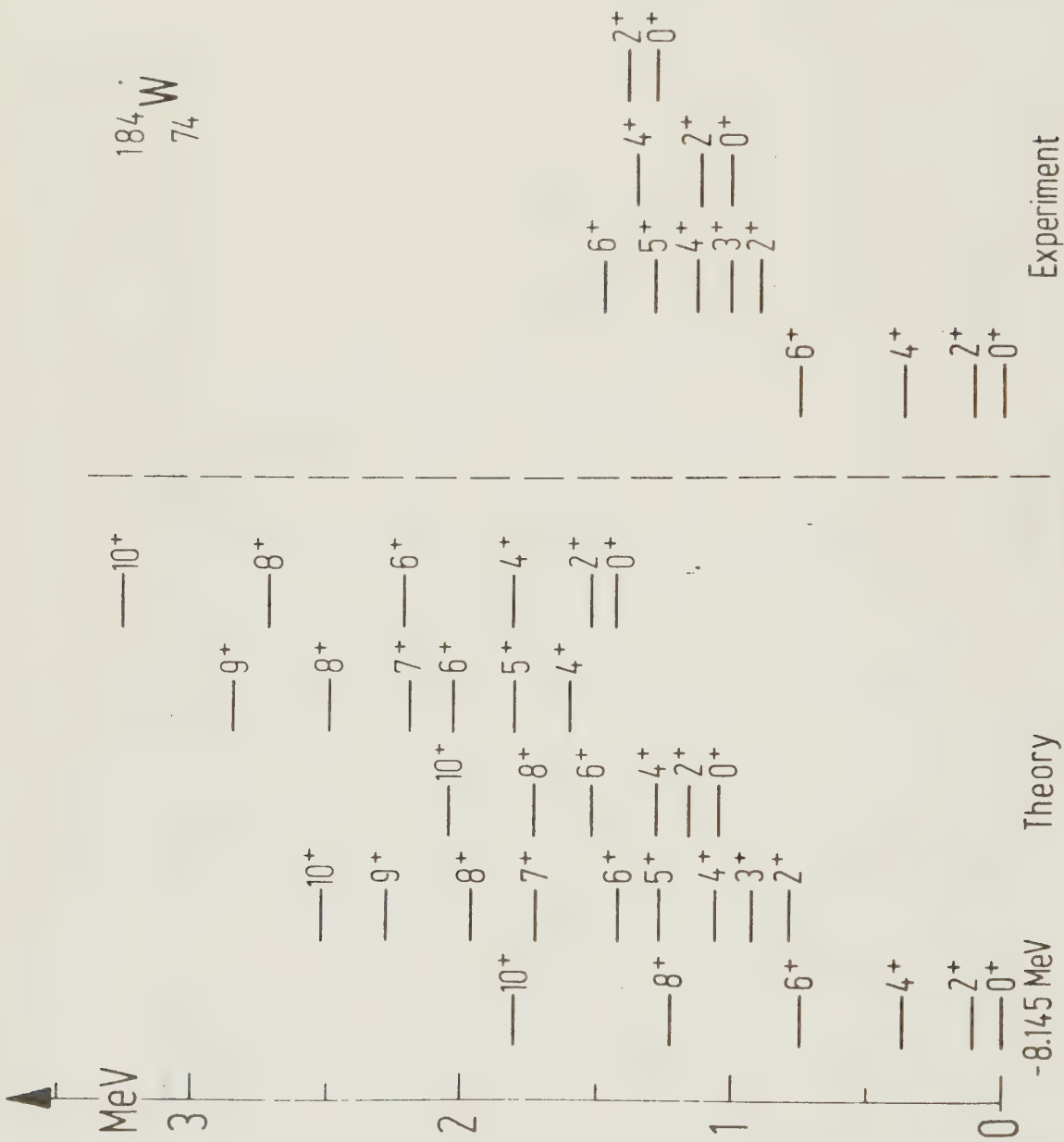


Fig. IV.5c

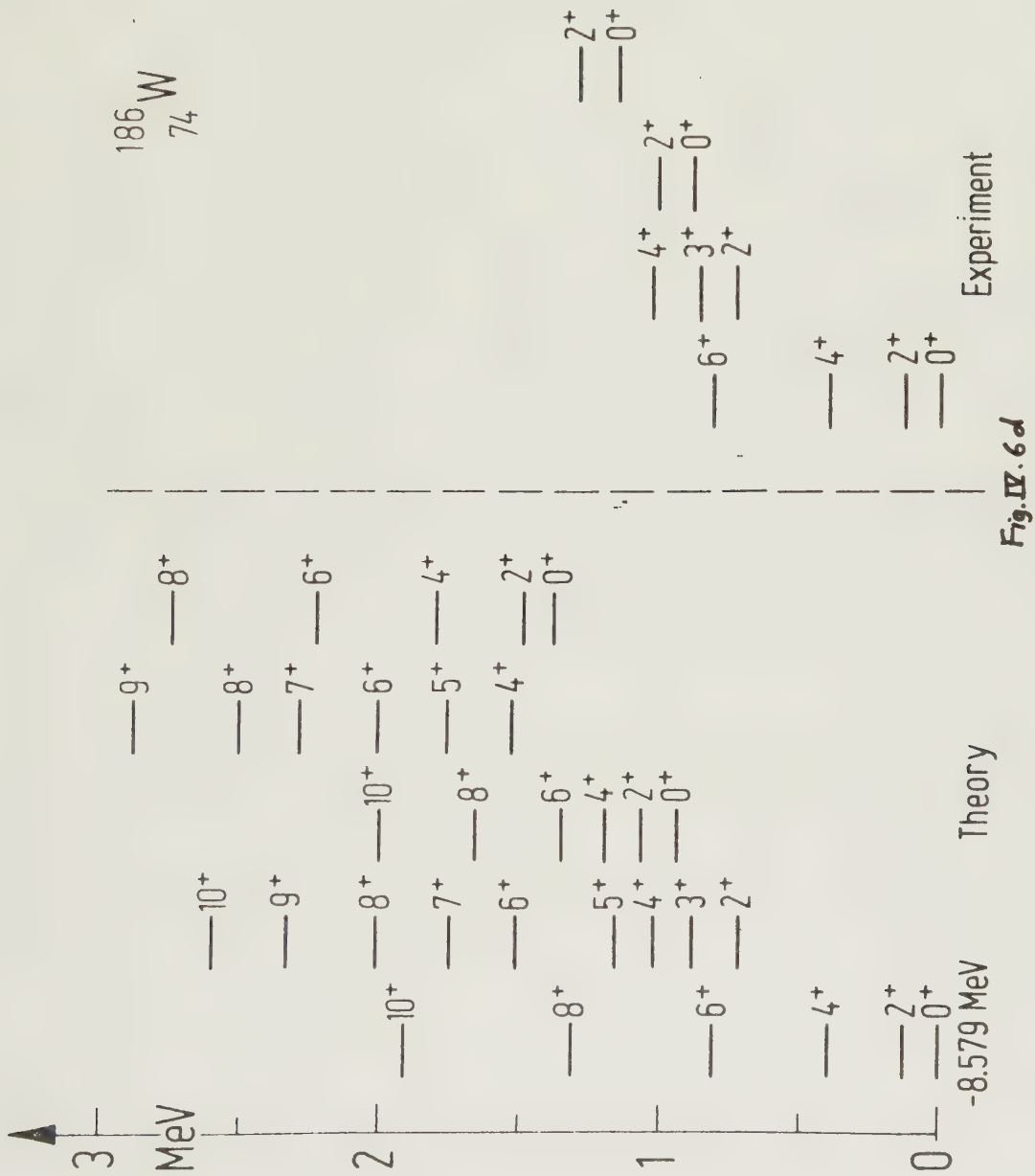


Fig. IV. 6d

sehr gering ist im Vergleich zu $0_1^+ - 0_2^+$, zwei Minima erzeugt werden, oder ein triaxiales Minimum erzeugt wird, falls das Spektrum, die BE2-Werte und Quadrupolmomente es zulassen. Im letzten Fall wäre ein 0^+ -Zustand als γ -Schwingung zu interpretieren. Bei $^{180}_{74}\text{W}$ und $^{182}_{74}\text{W}$ liegt zu wenig experimentelle Information vor. Bei $^{180}_{74}\text{W}$ ist kein 0^+ -Zustand gemessen worden, während bei $^{182}_{74}\text{W}$ nur ein angeregter 0^+ -Zustand bekannt ist. Um die PES bei beiden Isotopen endgültig festzulegen bedarf es eines zweiten angeregten 0^+ -Zustandes; denn nur dann lässt sich entscheiden ob ein zweites Minimum existiert oder nicht. Beim Betrachten der Isotope $^{184}_{74}\text{W}$ und $^{186}_{74}\text{W}$ ist eine Fortsetzung des oblaten Minimums bei $^{180}_{74}\text{W}$ und $^{182}_{74}\text{W}$ zu erwarten, obwohl in einer abgeschwächten Form, da das oblate Minimum bei $^{184}_{74}\text{W}$ bereits etwas schwächer ausgebildet ist als bei $^{186}_{74}\text{W}$.

(2) $^{238}_{92}\text{U}$

Als letztes Beispiel sei $^{238}_{92}\text{U}$ vorgestellt. Der Grund hierfür ist, dass sehr viele experimentelle Information zur Verfügung steht und Zustände bis $L=30^+$ gemessen wurden. Damit lässt sich das Modell bis zu hohen Drehimpulsen austesten! Im experimentellen Spektrum (Fig. IV.7) sind neben der Grundzustandsbande eine γ -Bande und zwei 0^+ -Banden zu sehen. Die erste 0^+ -Bande allerdings wirft Probleme auf, von ihr ist nur der 2^+ -Zustand sicher gemessen. Theoretisch stellt es ein grosses Problem dar die zwei 0^+ -Zustände so dicht beieinander zu bekommen. Aus diesem Grunde zeige ich hier zwei Versionen:

(a) Ein Minimum, allerdings ohne diese seltsame 0^+ -Bande, da diese mit einem Minimum nicht zu reproduzieren ist.

(b) Zwei Minima, die zwar beide 0^+ -Zustände reproduziert, aber eine willkürliche Annahme von einem weiteren oblaten Minimum darstellt.

Beim Anpassen des Spektrums wurden in (a) ein Minimum und in (b) bereits zwei Minima als Ausgangssituation hereingesteckt, da das Fitprogramm in (b) zu lange brauchen würde, um das zweite Minimum zu erzeugen. Die Annahme in (b) ist aber wegen der Erfahrung bei den W-Isotopen gerechtfertigt, wo das oblate Minimum automatisch herauskam.

(a) Ein Minimum

Siehe dazu Fig. IV.8. Die Doppellinie in der PES gibt die Ausbreitung der Grundzustandswellenfunktion an. Wie in Fig. IV.8 zu sehen ist, ist die Übereinstimmung zum Experiment bis einschliesslich 30^+ sehr gut. Angepasst wurden nur alle Zustände bis einschliesslich 6^+ , sodass alle anderen Zustände von 7^+ bis 35^+ Vorhersagen des Modells sind. In Fig. IV.8 sind nur die Zustände bis 32^+ eingezeichnet. Im

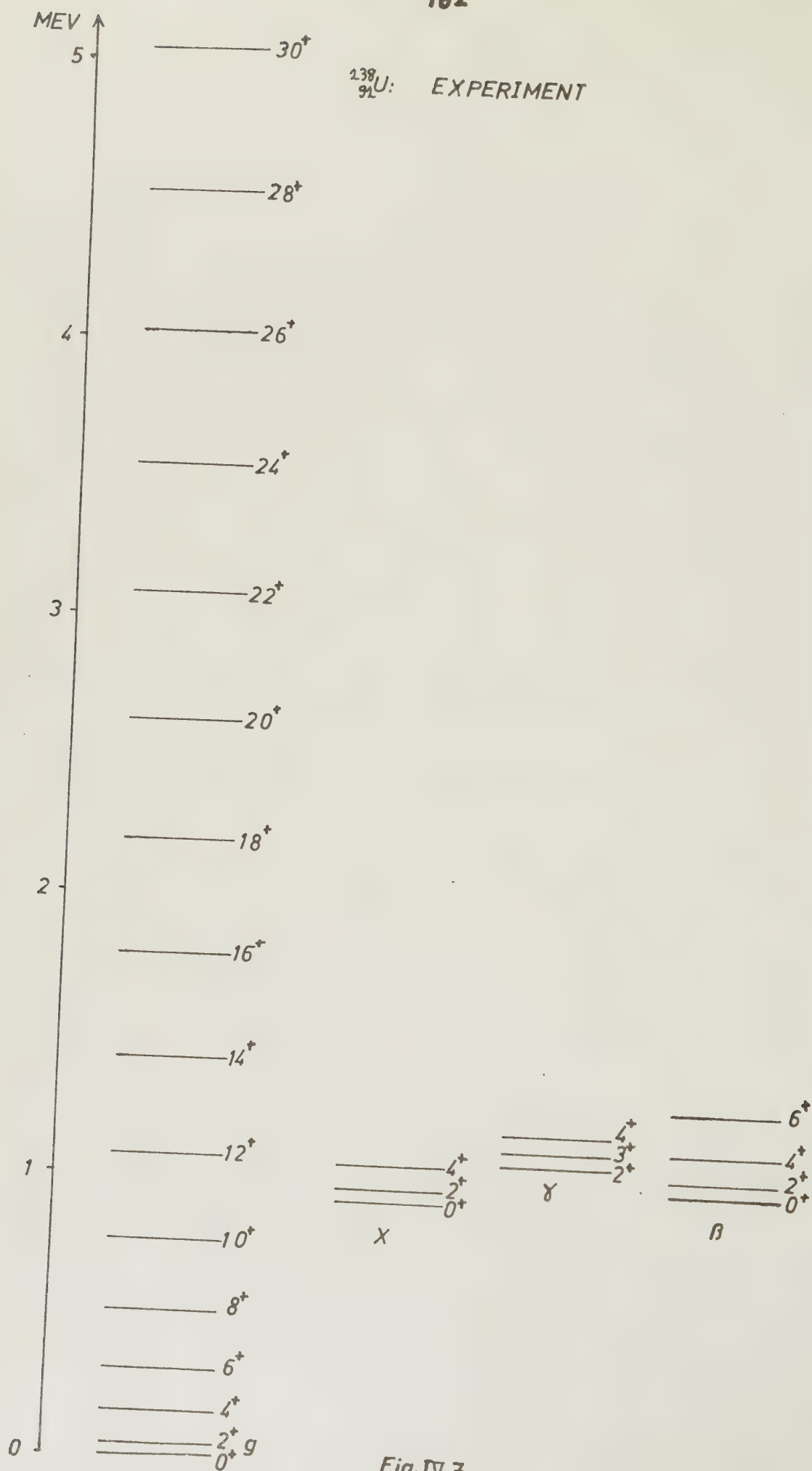


Fig. IV.7

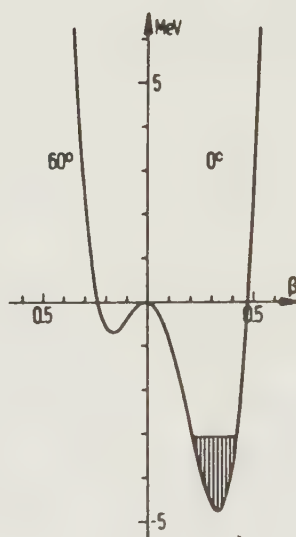
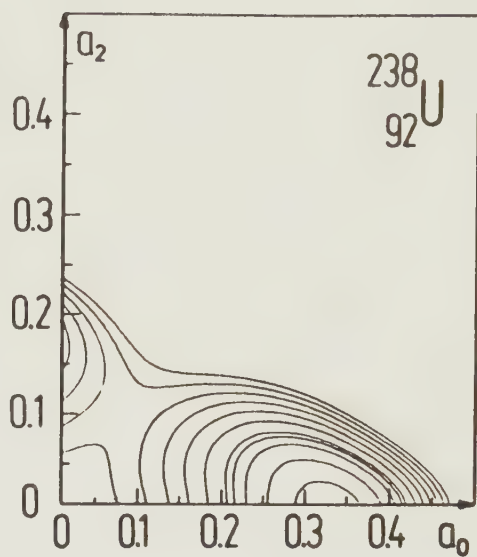
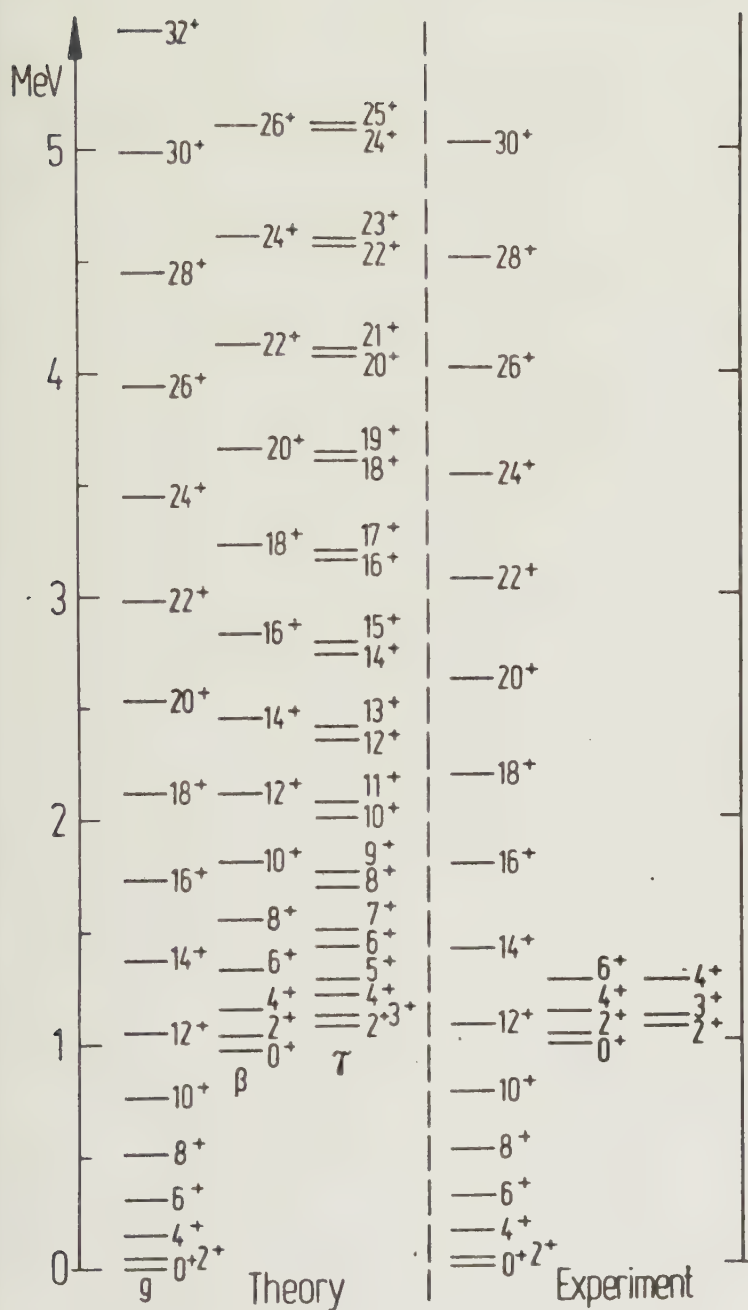


Fig. IV.8

Anhang (U.a) sind alle weiteren Zustände und BE2-Werte angegeben. In Tabelle IV.2 sind einige BE2-Werte zwischen den Banden verglichen mit dem Ergebnis von Ansatz (b) und dem Experiment. In Fig.IV.9 sind die BE2-Verhältnisse zum starren Rotator gegenüber den $\ddot{U}$ bergängen innerhalb der Grundzustandsbande aufgetragen. Die durchgezogene Linie gibt die Rechnung des Erweiterten-Rotations-Vibrations-Modell (ERVM) wider, die von Martin Seiwert (34) entwickelt wurde. Es entspricht dem normalen RVM, nur dass in der kinetischen Energie noch anharmonische Terme (P_3 und P_4) hinzugenommen wurden und es noch zwei Minima in der PES auf der prolaten Achse behandeln kann. Die gestrichelte Linie gibt die Rechnung nach dem generalisierten Modell an. Wie zu erkennen ist, besteht kein grosser Unterschied; denn die gestrichelte Kurve verläuft nahezu parallel zur durchgezogenen Kurve und würde mit ihr zusammenfallen, wenn derselbe $BE2(0_2^+ \rightarrow 2_2^+)$ -Wert genommen wird. Es stellt sich heraus, dass die Energien im EVRM ähnlich gut beschrieben werden, welches nicht verwunderlich ist, denn das Minimum in der PES ist sehr deutlich auf der prolaten Achse konzentriert, kann also sehr gut durch ein Oszillatorpotential bei $\beta \neq 0$ angenähert werden! Im Vergleich zum Experiment hingegen steigen die BE2-Werte kontinuierlich an. Dies ist die Folge der Zentrifugalstreckung, da der BE2-Wert von der Deformation abhängt. Das Experiment sagt, dass die BE2-Verhältnisse zum starren Rotator nahezu 1 ist! Bei der Auswertung wurde allerdings angenommen, dass der Anregungsvorgang sich hauptsächlich in der Grundzustandsbande ereignet. Vor kurzem wurde ein Coulombanregungsexperiment an ^{232}Th durchgeführt (41). ^{232}Th verhält sich ähnlich wie ^{238}U . Die vorläufigen Ergebnisse deuten darauf hin, dass andere Banden (speziell die Oktupolbande, die auch in ^{238}U gemessen wurde) nicht vernachlässigt werden dürfen. In Fig.IV.9a sind die Effekte von

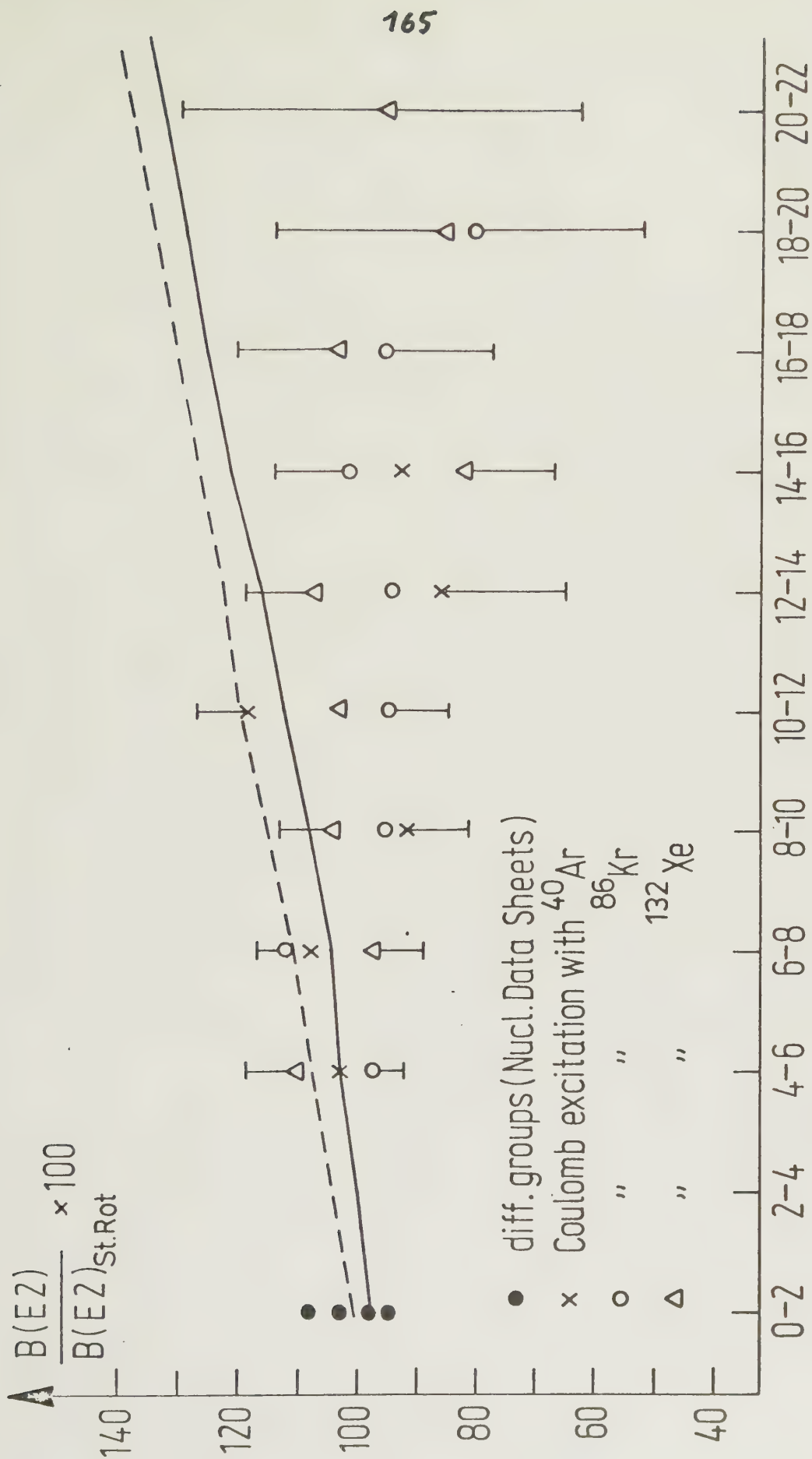


Fig. IV.9

der β - und Oktupolbande auf die ausgewerteten γ -yields angegeben. Die Ordinate gibt den prozentualen Fehler relativ zur Theorie an (in diesem speziellen Fall der starre Rotator). Ein positives Vorzeichen im Fehler bedeutet, dass die gemessenen γ -yields grösser sind als die theoretisch vorhergesagten. Da die γ -yields proportional zum BE2-Wert sind,

$$(\gamma\text{-yield}) \sim \text{BE2-Wert}$$

gilt die Fehlerbetrachtung auch für den BE2-Wert. Die Erklärung, dass der experimentell deduzierte BE2-Wert davon abhängt welche Banden mitgenommen werden, ist wie folgt am Beispiel der Oktupolbande erklärt: Die Oktupolbande nimmt Anregung aus der Grundzustandsbande heraus. Die Folge davon ist, dass der Inhalt des γ -Peaks (γ -yield), der zu einem bestimmten Übergang gehört, kleiner wird. Wird nun angenommen, dass keine Anregung aus der Grundzustandsbande herausführt, so ergibt das Experiment einen kleineren BE2-Wert. Die Hinzunahme von anderen Banden hebt also den experimentell bestimmten BE2-Wert an. Wie gross allerdings der Gesamteffekt sein wird muss noch untersucht werden!

(b) Zwei Minima

Die PES ist in Fig.IV.10 und das berechnete Spektrum im Vergleich zum experimentellen in Fig.IV.11 zu sehen. Da die seltsame X-Bande aus Fig.IV.7 noch mitgenommen wurde, musste ein oblates Minimum angenommen werden. Wie aus Fig.IV.11 zu ersehen ist, stimmt das theoretische Spektrum ähnlich gut mit dem Experiment überein, wie es in (a) der Fall war, nur dass jetzt die zusätzliche Bande reproduziert wird. Die BE2-Werte innerhalb der Grundzustandsbande verhalten sich genauso wie in (a), sodass hierüber keine Figur gezeigt wird. Die tabellarischen Werte sind im Anhang (U.b) angegeben.

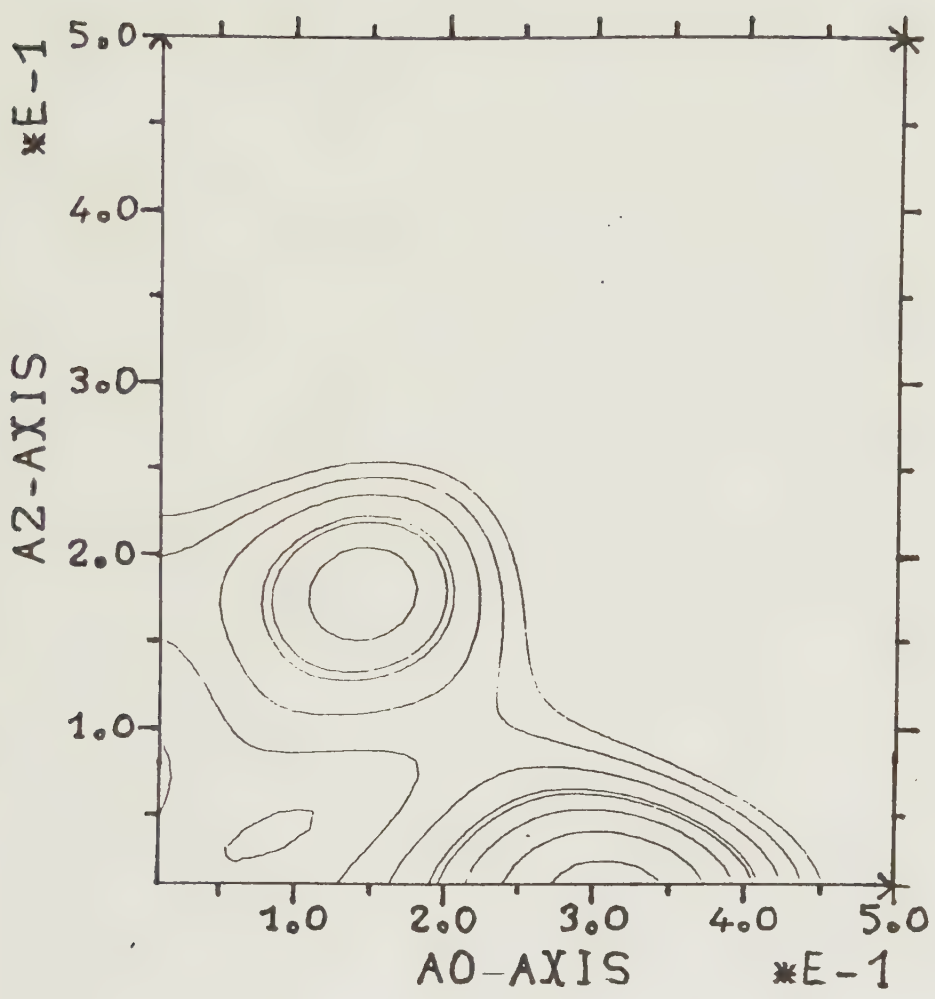


Fig. IX.10

MEV ↑

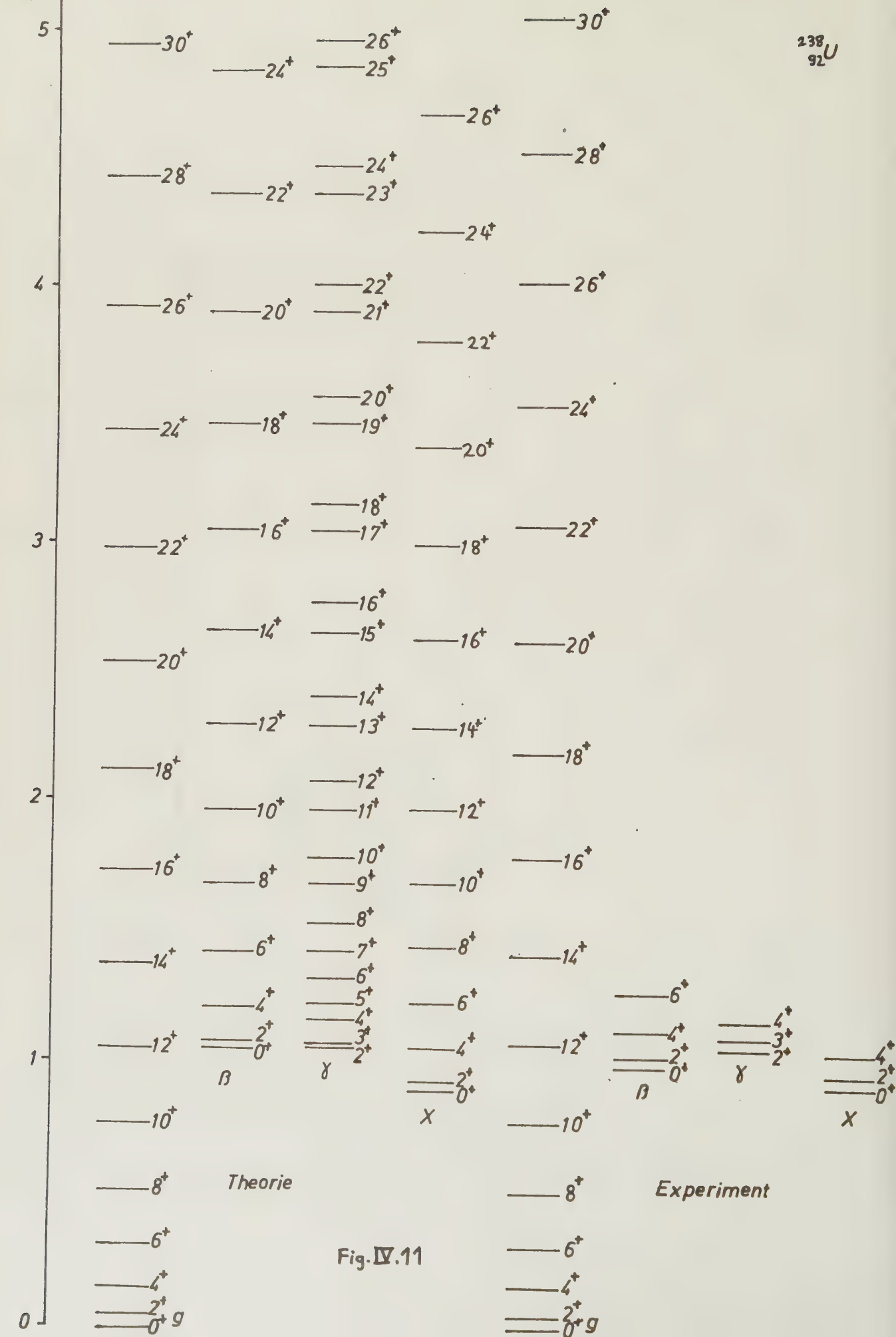
 $^{238}_{92}\text{U}$ 

Fig. IV.11

Zum Schluss sind in Tabelle IV.2 einige gemessene BE2-Werte zwischen den Banden zu den verschiedenen Ansätzen in (a) und (b) verglichen. Der erste Wert ist der Übergang $0_1^+ \longrightarrow 2_1^+$ der exakt angepasst wurde. Die Übereinstimmung zum Experiment ist sehr gut.

Tabelle IV.2

	Eier Minimum	Experiment	prolates+oblates Minimum
$0_1^+ \longrightarrow 2_1^+$	11.700	11.70 ± 0.15	11.700
$0_2^+ \longrightarrow 2_2^+$	0.108	0.063 ± 0.009	0.074
$0_2^+ \longrightarrow 2_2^+$	0.332	0.127 ± 0.009	0.301
$0_2^+ \longrightarrow 2_x^+$	%	0.017 ± 0.007	0.016

(Einheit: $e^2 b^2$)

(V) Numerisches Anpassungsverfahren

Im folgenden wird das Verfahren zur Bestimmung der Parameter in (I.17) erläutert.

(1) Verfahren

Das Verfahren beruht auf der Gradientenmethode, welche wie folgt funktioniert:

Gegeben sei eine Qualitätsfunktion, die die Qualität der Anpassung charakterisiert. In meinem Programm wurde die Qualitätsfunktion in drei Teile zerlegt:

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \chi_E^2 + \chi_B^2 + \chi_Q^2 \\ \chi_E^2 &= \sum_{i=1}^{N_E} \frac{(\Delta E_i^c(c_m) - \Delta E_i^{ex})^2}{\Delta E_i^{ex2}} \\ \chi_B^2 &= \sum_{i=1}^{N_B} (\log_{10} BE2_i^c(c_m) - \log_{10} BE2_i^{ex})^2 \\ \chi_Q^2 &= \sum_{i=1}^{N_Q} \frac{(Q_i^c(c_m) - Q_i^{ex})^2}{Q_i^{ex}} \end{aligned}$$

(Δ in χ_E^2 soll andeuten, dass nur Energiedifferenzen zum Grundzustand betrachtet werden!) Der erste Anteil χ_E^2 gibt die Abweichung der berechneten Energien, die von den Parametern c_m abhängen, von den experimentell gemessenen E_i^{ex} an. $\left(\frac{E_i^c - E_i^{ex}}{E_i^{ex}}\right)$ entspricht einer prozentualen Gewichtung. Niedrig liegende Zustände werden so stärker betont. χ_B^2 bezieht sich auf die Fehler in den BE2-Werten. Da sehr oft kleine BE2-Werte vorkommen und die berechneten beim Start um einige Zehnerpotenzen abweichen können, würde eine prozentuale Gewichtung eine zu grosse Betonung auf die BE2-Werte legen. Aus diesem Grunde wurde eine logarithmische gewählt. Kleine BE2-Werte treten zwischen den Banden auf und sind sehr sensitiv auf Veränderungen der Parameter, d.h. der PES.

Grosse BE2-Werte innerhalb der Banden ($> 1.$) werden so nicht stark gewichtet.

Der dritte Teil χ_Q^2 schliesslich hat dieselbe Form wie χ_E^2 , gilt aber hier für Quadrupolmomente. Da Quadrupolmomente besser anzupassen sind als BE2-Werte und diese sehr sensitiv auf die PES reagieren, wurde eine prozentuale Gewichtung gewählt.

Die so konstruierte Qualitätsfunktion χ^2 wurde aus der Erfahrung heraus mit Anpassungen von Spektren gewonnen. Das Gradientenprogramm berechnet den Gradienten von χ^2 nach den Parametern

$$\nabla \chi^2 = \left(\frac{\partial \chi^2}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial \chi^2}{\partial c_n} \right)$$

und verändert die Parameter so, dass χ^2 sich in Richtung des stärksten Abfalls verändert, also entgegengesetzt zum Gradienten. (Im Anhang (L) ist der Gradient von χ^2 angegeben.)

Dies sei an einem einfachen Beispiel mit nur einem Parameter c verdeutlicht (siehe dazu Fig.VI.1).

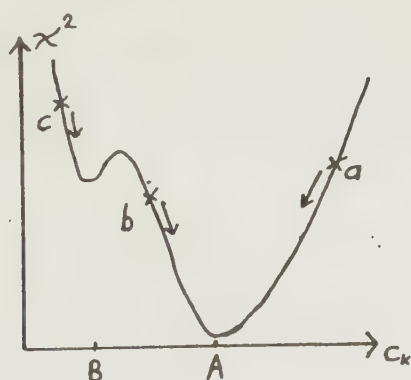


Fig. V.1

Der Funktion χ^2 entspricht bei n Parametern eine Fläche im $(n+1)$ -dimensionalen Raum, die Minima, Sattelpunkte etc. besitzt. Im Falle von einem Parameter ist dies gerade eine

Kurve (Fig.V.1). Wird vom Punkt (a) oder (b) aus gestartet, dann gerät man zielstrebig in das absolute Minimum. Dort liegt dann die best mögliche Anpassung. Wenn aber ein Nebenminimum existiert und vom Punkt (c) aus gestartet wird, dann liegt das Ergebnis im Nebenminimum mit einem noch hohen χ^2 . Im Programm macht es sich durch einen grossen Wert von bemerkbar und der einzige Ausweg wäre einen anderen Start zu suchen, in der Hoffnung aus dem Nebenminimum herauszukommen. Für einen ausgesuchten BE2-Wert gibt es noch eine analytische Methode ihn exakt anzupassen (siehe Anhang (M))!

(2) Was muss bei einer Anpassung beachtet werden?

Zunächst wird einfach eine Startpotentialenergiefläche eingegeben. Es ist empfehlenswert zunächst nur die Terme des Gneuss-GreinerPotentials (siehe I.12) mitzunehmen. Falls die Konvergenz nach ca. 20 Iterationen kaum mehr besser wird, können höhere Terme hinzugefügt werden. In Tabelle V.1 sind die Terme $V_{g,n} \beta^g (\cos 3\gamma)^n$ aufgeführt, die vollkommen ausreichen. Höhere Terme tragen kaum zur besseren Konvergenz bei. Die Erfahrung zeigte, dass ihre Werte nur sehr klein bleiben, wenn sie eingeschaltet werden. Ausnahmen bestehen, wenn eine komplizierte β -Abhängigkeit vorliegt. In diesem Fall werden alle Terme $V_{g0} \beta^g$ zu $g=0$ bis $g=10$ mitgenommen.

Tabelle V.1

λ	2	3	4	5	6
0	x	x	x	x	x
1	x	x	x	x	
2	x	x	x		x
3	x	x			
4	x	x			

In das Programm können noch Energiedifferenzen mitgenommen werden. Dies ist wichtig zur Verhinderung eines übertriebenen even-odd-staggerings, das in der γ -Bande auftritt. Falls die Zustände innerhalb einer 0^+ -Bande zu weit auseinander liegen, können die Differenzen innerhalb dieser 0^+ -Bande verwendet werden. Auch um Positionen von einzelnen Zuständen, z.B. Bandenköpfe, zu festigen, kann die Differenz zum Grundzustand mitgenommen werden. Auf diese Weise werden Zustände, die vorher schwer an die richtige Position zu schieben waren, stärker betont. Die Energiedifferenzen können auch mehrmals eingegeben werden. Vorsicht ist allerdings bei einem Zustand geboten, der kein kollektiver Zustand sein könnte (siehe Beispiel ¹⁹⁴Pt im letzten Kapitel).
78
solch Zustände müssen ausgeschlossen werden.

Falls immer noch keine gute Konvergenz erzielt ist, ist eine neue PES als Start zu wählen. Es könnte nämlich sein, dass die Funktion χ^2 in einem Nebenminimum gelandet ist, wie es in diesem Kapitel Abschnitt (1) erläutert ist.

Was ein gutes Ergebnis ist, bleibt in gewisser Weise jeder Person selbst überlassen. Der durchschnittliche Fehler für die Energien sollte allerdings unter 10% liegen. Die PE2-Werte sind allerdings schwerer zu beurteilen und dort

sollte man selbst entscheiden, ob die Werte ausreichend sind.

VI. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein generalisiertes Kollektivmodell der Kerne vorgestellt, mit dessen Hilfe alle kollektiven Eigenschaften, die auf Quadrupoldeformationen beruhen, beschrieben werden können. Es ist nicht mehr nötig, von einem speziellen Modell zum anderen überzuwechseln, falls das kollektive Spektrum sich total ändert.

Der Hamiltonoperator des Modells ist so allgemein wie möglich gewählt. Besonders die Potentielle Energie ist so konstruiert, dass alle möglichen Potential-Energie-Flächen erzeugt werden können, egal wie kompliziert sie sind. Es können auch andere Entwicklungen in den kollektiven Variablen β und γ gewählt werden, die aber dieselbe Potential-Energie-Fläche reproduzieren. Die Entwicklungskoeffizienten sind deshalb streng miteinander gekoppelt und haben nicht mehr die Bedeutung von physikalisch unabhängigen Parametern. Die wirkliche Physik ist aus der Potential-Energie-Fläche zu entnehmen, wie z.B. die Position des Potentialminimums, Steifheit des Potentials gegenüber β - und γ -Vibrationen, etc.. Dies wurde im Kapitel IV ausführlich behandelt.

Mit diesem allgemeinen Modell ist es nun möglich die Grenzen der Kollektivmodelle, die sich auf dieselbe Darstellung beziehen, auszuloten. Wie in Kapitel IV gezeigt wurde, stimmen die qualitativen Eigenschaften der theoretisch berechneten Spektren mit den experimentellen sehr gut überein, wobei es stets schwierig sein wird die absolute Übereinstimmung zu erreichen, insbesondere in den Nebenbanden der Spektren.

Mit diesem Modell wurden Rechnungen über drei Isotopenketten hinweg durchgeführt und aufgezeigt, dass aufgrund der Allgemeinheit, Entwicklungen in den kollektiven Eigenschaften über weite Bereiche der Isotopen- und Isotonenketten im Zusammenhang untersucht werden können!

Es besteht die Absicht das Modell auf andere Isotopenketten anzuwenden und allmählich einen grossen Teil des Periodensystems der

Elemente zu überdecken. Da die kollektiven Eigenschaften qualitativ an der Potential-Energie-Fläche diskutiert werden können, werden diese zur Darstellung herangezogen und in einem System der Potential-Flächen angeordnet.

Die Allgemeinheit des Modells wurde allerdings mit einem grösseren numerischen Aufwand als im Vergleich zu speziellen Modellen erkauft. Trotzdem ist das Verfahren zur Berechnung der Matrixelemente einfach und übersichtlich, insbesondere durch die Gradientenformel (siehe Kapitel II), die es erlaubt auch noch so komplizierte Formen der kinetischen Energie zu behandeln.

In dieser Arbeit wurde auch eine neue Basis eingeführt, die gegenüber dem 5-dim. harmonischen Oszillator als Basis folgenden Vorteil hat: Die neue Basis besitzt ein Minimum und verbessert die Konvergenz beträchtlich, da die meisten Potential-Energie-Flächen ein Minimum bei $\beta \neq 0$ haben. Die dazu nötige Mathematik braucht kaum noch entwickelt zu werden, da alle formalen Ergebnisse direkt aus denen des harmonischen Oszillators gewonnen werden können (allerdings etwas verändert). Mit der neuen Basis lassen sich zwar keine realen γ -instabilen Kerne quantitativ beschreiben, jedoch können alle qualitativen Eigenschaften daran studiert werden, was wegen der einfachen mathematischen Behandlung Anwendung im Unterricht finden dürfte.

In dieser Arbeit wurde weiterhin gezeigt (Kapitel III), dass das Interacting Boson Modell (IBM), welches in den letzten Jahren als ein "neues" Modell dargestellt wurde, in die unsere Darstellungsweise überführt werden kann. Dies bedeutet, dass es vom physikalischen Standpunkt aus nichts fundamental Neues darstellt.

Weiterhin wurde eine Methode entwickelt, um die unbekannten Konstanten in dem kollektiven Hamiltonoperator aus dem Experiment zu bestimmen. Mit diesem Programm wurden alle Ergebnisse in den praktischen Rechnungen erzielt.

ANHANG (A)

Betrachten wir eine Transformation der Bosonenoperatoren b_μ^+ , b_μ in die Bosonenoperatoren β_μ^+ , β_μ :

$$\begin{aligned}\beta_\mu &= \sum_\nu (U_{\nu\mu} b_\nu + V_{\nu\mu}^* b_\nu^+) \\ \beta_\mu^+ &= \sum_\nu (U_{\nu\mu}^* b_\nu^+ + V_{\nu\mu} b_\nu)\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

$U_{\nu\mu}$, $V_{\nu\mu}$ sind die Elemente der Transformationsmatrix.

Der Operator N ist definiert durch

$$\begin{aligned}\hat{N} &= \sum_\mu \beta_\mu^+ \beta_\mu = \sum_\mu \sum_{\nu_1 \nu_2} (U_{\nu_1\mu}^* b_{\nu_1}^+ + V_{\nu_1\mu} b_{\nu_1}) \cdot \\ &\quad (U_{\nu_2\mu} b_{\nu_2} + V_{\nu_2\mu}^* b_{\nu_2}^+) = \\ &= \sum_{\nu_1 \nu_2} \left(\sum_\mu U_{\nu_1\mu}^* U_{\nu_2\mu} \right) b_{\nu_1}^+ b_{\nu_2} + \\ &\quad + \sum_{\nu_1 \nu_2} \left\{ \left(\sum_\mu U_{\nu_1\mu}^* V_{\nu_2\mu}^* \right) b_{\nu_1}^+ b_{\nu_2}^+ + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_\mu V_{\nu_1\mu} U_{\nu_2\mu} \right) b_{\nu_1} b_{\nu_2} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_\mu V_{\nu_1\mu} V_{\nu_2\mu}^* \right) b_{\nu_1} b_{\nu_2}^+ \right\}\end{aligned}\quad (\text{A.2})$$

Damit der Teilchenzahloperator in den b_μ^+ und b_μ die gleiche Form hat, nämlich

$$\hat{N} = \sum_{\nu_1} b_{\nu_1}^+ b_{\nu_1} \quad (\text{A.3})$$

müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$\left. \begin{aligned}\sum_\mu U_{\nu_1\mu}^* U_{\nu_2\mu} &= \delta_{\nu_1 \nu_2} \longrightarrow U^\dagger U = \mathbb{1} \\ \sum_\mu U_{\nu_1\mu}^* V_{\nu_2\mu}^* &= 0 \\ \sum_\mu V_{\nu_1\mu} U_{\nu_2\mu} &= 0 \\ \sum_\mu V_{\nu_1\mu} V_{\nu_2\mu}^* &= 0\end{aligned} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{aligned}U^\dagger V &= 0 \\ V^\dagger U &= 0 \\ V^\dagger V &= 0\end{aligned} \right. \quad (\text{A.4})$$

Dies bedeutet, dass $V=0$ und U ein unitärer Operator sein muss. (A.1) reduziert sich auf die unitäre Transformation

$$\beta_\mu = \sum_\nu U_{\mu\nu} b_\nu$$

$$\beta_\mu^\dagger = \sum_\nu U_{\nu\mu}^* b_\nu^\dagger$$

(A.5)

welche den Hamiltonoperator invariant lassen.

ANHANG (B)

Zu beweisen ist

$$L^2 \vec{r} = 1(1+1) \vec{r} = 2 \vec{r} \quad (\text{B.1})$$

d.h. dass $\vec{r}$ Drehimpuls 1 besitzt!

$$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$$

mit

$$L^2 = L_{x_1}^2 + L_{x_2}^2 + L_{x_3}^2$$

$$L_{x_1} = \frac{1}{i} \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

$$L_{x_2} = \frac{1}{i} \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

$$L_{x_3} = \frac{1}{i} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)$$

(B.2)

Einfaches Nachrechnen ergibt:

$$L_{x_1}^2 \vec{r} = (0, x_2, x_3)$$

$$L_{x_2}^2 \vec{r} = (x_1, 0, x_3)$$

$$L_{x_3}^2 \vec{r} = (x_1, x_2, 0)$$

(B.3)

Damit gilt:

$$L^2 \vec{r} = (L_{x_1}^2 + L_{x_2}^2 + L_{x_3}^2) \vec{r} =$$

$$= 2(x_1, x_2, x_3) = 2 \vec{r} = 1(1+1) \vec{r}$$

(B.4)

ANHANG (C)

Die Bedingungen für das Polynom waren:

$$\begin{aligned} (a) \hat{N} P &= \nu P \\ (b) \hat{L}_1 P &= 0 \\ (c) L_0 P &= L P \end{aligned} \quad (C.1)$$

Die Bedingungen (a)-(c) werden im folgenden nacheinander ausgenützt:

(a)

$$\hat{N} P(\beta_m^+) = \sum_{m'} \beta_{m'}^+ \frac{\partial}{\partial \beta_{m'}^+} P(\beta_m^+) = \nu P(\beta_m^+) \quad (C.2)$$

Diese Gleichung ist unter dem Namen "Euler'sche Gleichung" bekannt und besagt, dass das Polynom homogen vom Grade ν in den Erzeugungsoperatoren β_m^+ sein soll, d.h. es ist von der Form

$$\sum_{n_{-2}, \dots, n_{+2}} A_{n_{-2}, \dots, n_{+2}} \beta_{-2}^{+n_{-2}} \beta_{-1}^{+n_{-1}} \beta_0^{+n_0} \beta_{+1}^{+n_{+1}} \beta_{+2}^{+n_{+2}} \quad (C.3)$$

mit $n_{-2} + n_{-1} + n_0 + n_{+1} + n_{+2} = \nu$

Wenn $\beta_2^{+\nu}$ herausgezogen wird, so ist folgender Ansatz gerechtfertigt:

$$P(\beta_m^+) = (\beta_2^+)^{\nu} P' \left(\frac{\beta_1^+}{\beta_2^+}, \frac{\beta_0^+}{\beta_2^+}, \frac{\beta_{-1}^+}{\beta_2^+}, \frac{\beta_{-2}^+}{\beta_2^+} \right) \quad (C.4)$$

P' ist ein noch näher zu bestimmendes Polynom. Der nächste Schritt besteht darin, die in P' vorkommenden Faktoren durch die elementaren Faktoren (1,2), (2,0), (2,2), (3,0) und (3,3) zu ersetzen. Die Faktoren haben folgende Form:

$$\begin{aligned} \frac{(2,0)}{\beta_2^{+2}} &= 2 \frac{\beta_{-2}^+}{\beta_2^+} - 2 \frac{\beta_{-1}^+}{\beta_2^+} \frac{\beta_1^+}{\beta_2^+} + \frac{\beta_0^{+2}}{\beta_2^{+2}} \\ \frac{(3,3)}{\beta_2^{+3}} &= 2 \frac{\beta_{-1}^+}{\beta_2^+} - \sqrt{6} \frac{\beta_1^+}{\beta_2^+} \frac{\beta_0^+}{\beta_2^+} + \frac{\beta_{-1}^{+3}}{\beta_2^{+3}} \\ \frac{(2,2)}{\beta_2^{+2}} &= 2 \sqrt{2} \frac{\beta_0^+}{\beta_2^+} - \sqrt{3} \frac{\beta_{-1}^{+2}}{\beta_2^{+2}} \end{aligned} \quad (C.5)$$

Man beginnt mit der ersten Gleichung löst diese nach $\frac{\beta_{-2}^+}{\beta_2^+}$ auf und ersetzt dies im Polynom P' von (C.4) überall ein, wo $\frac{\beta_{-2}^+}{\beta_2^+}$ vorkommt. Anschliessend wird die zweite Gleichung (die nicht von $\frac{\beta_{-2}^+}{\beta_2^+}$ abhängt (!)) nach $\frac{\beta_{-1}^+}{\beta_1^+}$ aufgelöst und dasselbe Verfahren wie beim ersten Schritt wird angewendet. Danach wird die dritte Gleichung nach $\frac{\beta_0^+}{\beta_2^+}$ aufgelöst und das Ergebnis in P' eingesetzt. Die daraus resultierende Form ist nun:

$$P(\beta_m^+) = (\beta_2^+)^{\nu} P'' \left(\frac{\beta_{+1}^+}{\beta_2^+}, \frac{(2,2)}{\beta_2^{+2}}, \frac{(3,3)}{\beta_2^{+2}}, \frac{(2,0)}{\beta_2^{+2}} \right) \quad (C.6)$$

Da L_1 der Aufsteigeoperator des Drehimpulses ist und (ν, L) Kopplungen von ν Phononen zu L und maximaler magnetischer Projektion $M=L$ darstellt, gilt:

$$L_1 \beta_2^+ = L_1 (2,0) = L_1 (3,3) = L_1 (2,2) = 0$$

(C.7)

und $L_1 \beta_1^+ = -\sqrt{2} \beta_2^+$

(b)

Wird L_1 auf $P(\beta_m^+)$ angewendet, so vertauscht er wegen (C.7) mit β_2^+ und wirkt nur auf P'' und dort nur auf Potenzen von $\frac{\beta_1^+}{\beta_2^+}$. Bei Anwendung der Kettenregel gilt schliesslich:

$$L_1 P = (\beta_2^+)^{\nu} L_1 P'' = -\sqrt{2} (\beta_2^+)^{\nu} \frac{\partial}{\partial (\frac{\beta_1^+}{\beta_2^+})} P'' \left(\frac{\beta_1^+}{\beta_2^+}, \dots \right) = 0 \quad (C.8)$$

Daraus resultiert die vorläufige Form des Polynoms:

$$P(\beta_m^+) = \sum_{n_1 n_2 n_3} B_{n_1 n_2 n_3} (2,0)^{n_1} (3,3)^{n_2} (2,2)^{n_3} (1,2)^{\nu - 2n_1 - 3n_2 - 2n_3} \quad (C.9)$$

Dies kann noch weiter vereinfacht werden, indem die Kopplung (3,3) durch die Relation

$$\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right) (3,3)^2 = (1,2)^3 (3,0) - \frac{3}{2} (2,2) (2,0) (1,2)^2 + \frac{1}{4} (2,2)^3 \quad (\text{C.10})$$

ersetzt wird. Damit lassen sich aber nur gerade Potenzen von $(3,3)$ ersetzen. Bei geradem Drehimpuls trifft dies zu, hingegen beim ungeraden Drehimpuls bleibt ein Faktor $(3,3)$ übrig. Auf diese Weise kommt man zur getrennten Behandlung von geraden und ungeraden Drehimpuls.

ANHANG (D)

Es soll

$$P(\beta_m^+) |0\rangle = \pi^{-\frac{r}{4}} 2^{\frac{\lambda}{2}} P(\alpha_m) e^{-\frac{\beta^2}{2}} \quad (\text{D.1})$$

bewiesen werden, welche für alle harmonischen Oszillatoren mit Ausnahme des 1-dim. gelten soll.

Der 1-dim. harmonische Oszillator besitzt die Lösung (1 Freiheitsgrad)

$$\beta^n |0\rangle = \pi^{-\frac{1}{4}} 2^{-\frac{n}{2}} H_n(\alpha) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \quad (\text{D.2})$$

wobei $H_n(\alpha)$ die Entwicklung

$$H_n(\alpha) = 2^n \alpha^n - 2^{n-1} \binom{n}{2} \alpha^{n-2} + \dots \quad (\text{D.3})$$

besitzt. Für einen $r=(2l+1)$ -dim. harmonischen Oszillator gilt entsprechend

$$\begin{aligned} \sum_{n_i} A_{n_{-l} \dots n_{+l}} \beta_{-l}^{+n_{-l}} \dots \beta_{+l}^{+n_{+l}} |0\rangle = \\ = \pi^{-\frac{r}{4}} 2^{-\frac{\lambda}{2}} \sum_{n_i} A_{n_{-l} \dots n_{+l}} H_{n_{-l}}(\alpha_{-l}) \dots H_{n_{+l}}(\alpha_{+l}) \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

mit

$$\lambda = n_{-l} + \dots + n_{+l} \text{ und } \beta^2 = \sum_m \alpha_m \alpha_m^*$$

Um die Bestimmung der Koeffizienten in (D.4) geht es jetzt.

Wir wissen, dass folgende Bedingung erfüllt sein muss:

$$(\beta \cdot \beta) P(\beta_m^+) |0\rangle = \sum_m \beta_m \beta_m^* P(\beta_m^+) |0\rangle = 0$$

$$\text{und } \hat{N} P(\beta_m^+) |0\rangle = \lambda P(\beta_m^+) |0\rangle \quad (\text{D.5})$$

$$\text{mit } r=(2l+1) \ (l=1,2,\dots) \text{ und } \nu=\lambda$$

Hierbei beschränken wir uns auf Polynome mit $\nu=\lambda$, da in (II.100) nur solche stehen. Aus (II.54a,b) wissen wir weiterhin:

$$\begin{aligned} \beta^m &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha^m + i \pi^m) & \pi^m &= \pi_m^* = -i \frac{\partial}{\partial \alpha_m} \\ & \text{mit} & & \\ \beta_m &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_m - i \pi_m) & \pi_m &= i \frac{\partial}{\partial \alpha_m^*} = (-1)^m i \frac{\partial}{\partial \alpha_{-m}} \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Damit werden die Faktoren in (D.5) ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} \sum_m \beta_m \beta_m^* &= \frac{1}{2} \sum_m (\alpha_m - i \pi_m) (\alpha_m^* + i \pi_m^*) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_m (\alpha_m \alpha_m^* + i (\alpha_m \pi_m^* - \pi_m \alpha_m^*) + \pi_m \pi_m^*) = \\ &= \frac{1}{2} \beta^2 + \sum_m \left(\alpha_m \frac{\partial}{\partial \alpha_m} + \frac{\partial}{\partial \alpha_{-m}} \alpha_{-m} \right) + \frac{1}{2} \sum_m \pi_m \pi_m^* = \\ &= \frac{1}{2} \beta^2 + \sum_m \alpha_m \frac{\partial}{\partial \alpha_m} + \frac{r}{2} + \frac{1}{2} \sum_m \pi_m \pi_m^* \end{aligned}$$

Mit $\Delta_\alpha := \sum_m \pi_m \pi_m^* = \sum_m (-1)^m \frac{\partial^2}{\partial \alpha_m \partial \alpha_{-m}}$ und $A := \sum_m \alpha_m \frac{\partial}{\partial \alpha_m}$

ergibt sich

$$\sum_m \beta_m \beta_m^* = \frac{1}{2} \beta^2 + A + \frac{r}{2} + \frac{1}{2} \Delta_\alpha \quad (\text{D.7})$$

Nun gilt weiterhin

$$H_{2\ell+1} = -\frac{1}{2} \Delta_\alpha + \frac{1}{2} \beta^2 = (N + \frac{r}{2})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \Delta_\alpha = \frac{1}{2} \beta^2 - \frac{r}{2} - N$$

(D.8)

Für $\sum_m \beta_m \beta_m^*$ ergibt sich daraus

$$\sum_m \beta_m \beta_m^* = \beta^2 + A - N \quad (\text{D.9})$$

Wegen (D.5) und (D.4) muss also gelten

$$\begin{aligned} \sum_m \beta_m \beta_m^* P(\beta_m^+) |0\rangle &= 0 = (\beta^2 + A - N) P(\beta_m^+) |0\rangle = \\ &= (A - \lambda + \beta^2) P(\beta_m^+) |0\rangle = (A - \lambda + \beta^2) \pi^{-\frac{r}{4}} 2^{-\frac{\lambda}{2}} \sum_{n_i} A_{n_1 \dots n_{2\ell}} \cdot H_{\alpha_1} \dots H_{\alpha_{2\ell}} e^{-\frac{\beta^2}{2}} \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Setzen wir H_{α_i} gemäss (D.3) ein, so gilt

$$(A - \lambda + \beta^2) \pi^{-\frac{r}{4}} 2^{\frac{\lambda}{2}} \sum_{n_i} A_{n_1 \dots n_{2\ell}} (\alpha_{-2}^{n_1} \dots \alpha_{+2}^{n_{2\ell}} + \dots) e^{-\frac{\beta^2}{2}} = 0 \quad (\text{D.11})$$

In der Klammer stehen Faktoren in α_i ($i=-1, \dots, +1$), die nach dem Grad ihrer Homogenität geordnet sind. Der erste Term ist z.B. homogen vom Grade $n_{-l} + \dots + n_{+l} = \lambda$, d.h.

$$A(\alpha_{-l}^{n_{-l}} \dots \alpha_{+l}^{n_{+l}}) = \sum_{n_i} \alpha_{n_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_{n_i}} (\alpha_{-l}^{n_{-l}} \dots \alpha_{+l}^{n_{+l}}) = \lambda (\alpha_{-l}^{n_{-l}} \dots \alpha_{+l}^{n_{+l}}) \quad (\text{D.12})$$

Jetzt wird die Wirkung von $(A - \lambda + \beta^2)$ auf die einzelnen Terme untersucht. Dabei müssen wegen (D.5) alle Terme verschwinden, wenn $(A - \lambda + \beta^2)$ auf sie wirkt.

Beachtet man, dass $A e^{-\frac{\beta^2}{2}} = -\beta^2 e^{-\frac{\beta^2}{2}}$ ist, so gilt

$$\begin{aligned} (A - \lambda + \beta^2) \sum_{n_i} A_{n_{-l} \dots n_{+l}} \alpha_{-l}^{n_{-l}} \dots \alpha_{+l}^{n_{+l}} e^{-\frac{\beta^2}{2}} &= \\ = \underbrace{(\lambda - \beta^2 - \lambda + \beta^2)}_{=0} \sum_{n_i} (\dots) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Die Homogenität in den α_i 's nimmt nun für jeden Term ab. Für einen beliebigen, der homogen vom Grade $k < \lambda$ sein soll, gilt schliesslich

$$\begin{aligned} (A - \lambda + \beta^2) \sum_{n_i} C_{n_{-l} \dots n_{+l}} (\alpha_{-l}^{n_{-l}} \dots \alpha_{+l}^{n_{+l}}) e^{-\frac{\beta^2}{2}} &= \\ = (k - \beta^2 - \lambda + \beta^2) \sum_{n_i} (\dots) \end{aligned}$$

$C_{n_{-l} \dots n_{+l}}$ sind dabei algebraische Ausdrücke in $A_{n_{-l} \dots n_{+l}}$

Da $(k - \lambda) \neq 0$ ist, ist die nur erfüllt, wenn

$$\sum_{n_i} C_{n_{-l} \dots n_{+l}} \alpha_{-l}^{n_{-l}} \dots \alpha_{+l}^{n_{+l}} e^{-\frac{\beta^2}{2}} = 0 \quad (\text{D.14})$$

gilt. Alle Terme mit einer geringeren Homogenität als λ verschwinden also. (D.14) ist dabei ein Bestimmungssystem für die Koeffizienten $A_{n_{-l} \dots n_{+l}}$. Aus (D.4) folgt somit

$$\begin{aligned}
 P(\beta_m^+) |0\rangle &= \sum_{n_i} A_{n_{-L} \dots n_{+L}} \beta_{-L}^{n_{-L}} \dots \beta_{+L}^{n_{+L}} |0\rangle = \\
 &= \pi^{-\frac{L}{4}} 2^{\frac{\lambda}{2}} \sum_{n_i} A_{n_{-L} \dots n_{+L}} \alpha_{-L}^{n_{-L}} \dots \alpha_{+L}^{n_{+L}} e^{-\frac{\beta^2}{2}} = \\
 &= \pi^{-\frac{L}{4}} 2^{\frac{\lambda}{2}} P(\alpha_m) e^{-\frac{\beta^2}{2}}
 \end{aligned}
 \tag{D.15}$$

ANHANG (E)

Was ist $(a_2^+)^{\delta} = (\beta_2^+ - (2,0)(2N+5)^{-1}\beta_2)^{\delta}$

Behauptung:

$$(a_2^+)^{\delta} = \sum_{n=0}^{\delta} \beta_2^{+\delta-n} (2,0)^n R_n^{\delta}(N) \beta_2^n$$

mit

$$R_n^{\delta}(N) = (-1)^n \binom{\delta}{n} \frac{(2N+2\delta+1)!!}{(2N+2\delta+2n+1)!!}$$

(E.1)

Induktionsverankerung:

$$(a_2^+)^1 = \beta_2^+ - (2,0)(2N+5)^{-1}\beta_2 = \sum_{n=0}^1 \beta_2^{+1-n} (2,0)^n R_n^1(N) \beta_2^n$$

Hier ist $R_0^1(N) = 1$ und $R_1^1(N) = -(2N+5)^{-1}$.

Unter der Annahme, dass es für δ gilt, folgt für $\delta+1$:

$$(a_2^+)^{\delta+1} = (\beta_2^+ - (2,0)(2N+5)^{-1}\beta_2) \sum_{n=0}^{\delta} \beta_2^{\delta-n} (2,0)^n R_n^{\delta}(N) \beta_2^n$$

Wird dies ausmultipliziert und mehrmals von der Relation

$$\beta_2 R_n^{\delta}(N) = R_n^{\delta}(N+1) \beta_2$$

$$\beta_2^+ R_n^{\delta}(N) = R_n^{\delta}(N-1) \beta_2^+$$

Gebrauch gemacht, so folgt

$$\begin{aligned} (a_2^+)^{\delta+1} &= \sum_{n=0}^{\delta} (\beta_2^+)^{\delta+1-n} (2,0)^n R_n^{\delta}(N) [1 - 2n(2N+2\delta+2n+3)^{-1}] \beta_2^n - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\delta+1} (\beta_2^+)^{\delta+1-n} (2,0)^n [2N+2\delta+2n+3]^{-1} R_{n-1}^{\delta}(N+1) \beta_2^n \end{aligned}$$

Dies führt zur Rekursionsformel

$$\begin{aligned} (2N+2\delta+2n+3) R_n^{\delta+1}(N) &= (2N+2\delta+3) R_n^{\delta}(N) - \\ &\quad - R_{n-1}^{\delta}(N+1) \end{aligned}$$

(E.2)

welche durch (E.1) befriedigt wird.

ANHANG (F)

Lösung des Integrals

$$\int_0^{\infty} x^p e^{-x} L_{n'}^{\alpha'}(x) L_{n''}^{\alpha''}(x) dx$$

Zur Lösung des Integrals bedient man sich eines Verfahrens, das in Ref. (37) angegeben ist. Ich werde es hier explizit vorführen.

Dabei werden die folgenden Relationen benutzt:

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma x} x^p dx = \frac{1}{\gamma^{p+1}} \Gamma(p+1) \quad (\text{F.1a})$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} t^p L_{\alpha}^{\alpha}(x) = \frac{e^{-\frac{x}{1-t}}}{(1-t)^{\alpha+1}} \quad (\text{F.1b})$$

Diese sind in Ref. (38) angegeben. Wegen (F.1b) gilt auch:

$$\sum_{\alpha', \alpha''=0}^{\infty} t^{\alpha'} s^{\alpha''} L_{\alpha'}^{\alpha'}(x) L_{\alpha''}^{\alpha''}(x) = \frac{e^{-x(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1-s})}}{(1-t)^{\alpha'+1} (1-s)^{\alpha''+1}} \quad (\text{F.2})$$

Multiplikation von (F.2) mit $x^p e^{-x}$ und anschliessender Integration von 0 bis ∞ ergibt:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha', \alpha''=0}^{\infty} t^{\alpha'} s^{\alpha''} \int_0^{\infty} x^p e^{-x} L_{\alpha'}^{\alpha'}(x) L_{\alpha''}^{\alpha''}(x) dx &= \\ &= \frac{1}{(1-t)^{\alpha'+1} (1-s)^{\alpha''+1}} \int_0^{\infty} x^p e^{-x(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1-s} + 1)} dx = \quad (\text{F.3}) \\ &= \frac{1}{(1-t)^{\alpha'+1} (1-s)^{\alpha''+1}} \frac{1}{(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1-s} + 1)} \Gamma(p+1) = (1-t)^{p-\alpha'} (1-s)^{p-\alpha''} \cdot (1-ts)^{-p-1} \Gamma(p+1) \end{aligned}$$

Mit den folgenden Regeln lässt sich (F.3) umschreiben:

$$\begin{aligned} (1+y)^x &= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{x}{m} t^m \\ \text{mit } \binom{-x}{m} &= (-1)^m \binom{x+m-1}{m}, \quad x > 0 \\ \binom{x}{m} &= \frac{\Gamma(x+1)}{m! \Gamma(x-m+1)} \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

ANHANG (G)

Lösung von $H_0 \varphi = E_{n\lambda} \varphi$:

Wenn wir auf den neuen Basishamiltonoperator schauen

$$H_0 = \frac{\hbar^2}{8_2} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\hat{\Lambda}^2}{2\beta^2} + \frac{t^4}{2\beta^2} + \frac{5^4}{2} \beta^2 \right) \quad (G.1)$$

und dies mit dem harmonischen Oszillator ($t=0$) vergleichen, dann ist klar zu erkennen, dass er nahezu die gleiche Form hat, wenn

$$\frac{\hat{\Lambda}^2}{2\beta^2} + \frac{t^4}{2\beta^2} = \frac{\hat{\Lambda}'^2}{2\beta^2} \quad (G.2a)$$

gesetzt wird, mit

$$\hat{\Lambda}'^2 = \hat{\Lambda}^2 + t^4 \quad (G.2t)$$

Die Eigenwerte des Operators (G.2) sind

$$\delta(\delta+3) = \lambda(\lambda+3) + t^4$$

$$\text{oder } \delta = \sqrt{(\lambda + \frac{3}{2})^2 + t^4} - \frac{3}{2} \quad (G.3)$$

Da die Form (G.1) mit (G.2) äquivalent zum harmonischen Oszillator ist, ist die Lösung des β -abhängigen Anteils die gleiche, ausser dass λ durch δ ersetzt wird. Für die Energien, die Wellenfunktionen und den Matrixelementen ergibt sich somit:

$$E_{n\lambda} = \hbar \omega_2 (2n + \delta + \frac{5}{2}) = \hbar \omega_2 (2n + \sqrt{(\lambda + \frac{3}{2})^2 + t^4} + 1) \quad (G.4a)$$

$$F_n^\delta(\beta) = \left[\frac{2(n!)}{\Gamma(n + \delta + \frac{5}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c_2}{\hbar \omega_2} \right)^{\frac{5}{2} + \delta} \beta^{\delta + \frac{3}{2}} L_n^{\delta + \frac{3}{2}} \left(\left(\frac{c_2}{\hbar \omega_2} \right) \beta^2 \right) e^{-\frac{1}{2} \frac{c_2}{\hbar \omega_2} \beta^2} \quad (G.4b)$$

$$\langle n' \lambda' | \beta^s | n \lambda \rangle = \left(\frac{\hbar \omega_2}{c_2} \right)^{s/2} \left[\frac{n!}{\Gamma(n + \delta + \frac{5}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{n'!}{\Gamma(n' + \delta' + \frac{5}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} (-1)^{n'+n} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(s + \delta + \delta' + 5))}{\sum_s (-1)^s \binom{\frac{1}{2}(s + \delta' - \delta)}{n-s} \binom{\frac{1}{2}(s + \delta - \delta')}{n'-s}} \cdot \left(-\frac{1}{2}(s + \delta + \delta' + 5) \right)_s \quad (G.4c)$$

Dies führt zu

$$\begin{aligned}
 \sum_{\ell', \ell''=0}^{\infty} t^{\ell'} s^{\ell''} \int_0^{\infty} x^p e^{-x} L_{\ell''}^{\alpha''}(x) L_{\ell'}^{\alpha'}(x) dx = \\
 = \Gamma(p+1) \sum_{m_1, m_2, m_3=0}^{\infty} \binom{p-\alpha'}{m_1} \binom{p-\alpha''}{m_2} \binom{-p-1}{m_3} \cdot (-1)^{m_1+m_2+m_3} t^{m_1+m_3} s^{m_2+m_3}
 \end{aligned} \tag{F.5}$$

mit der Umbenennung

$$\left. \begin{aligned} m_1+m_3 &= \ell' \\ m_1+m_3 &= \ell'' \\ m_3 &= \ell \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} m_1 &= \ell' - \ell \\ m_2 &= \ell'' - \ell \end{aligned}$$

geht die rechte Seite von (F.5) über in

$$\sum_{\ell', \ell''=0}^{\infty} t^{\ell'} s^{\ell''} \left\{ \Gamma(p+1) \sum_{\ell} \binom{p-\alpha'}{\ell'-\ell} \binom{p-\alpha''}{\ell''-\ell} \binom{-p-1}{\ell} (-1)^{\ell'+\ell''+\ell} \right\} \tag{F.6}$$

Da $t^{\ell'} s^{\ell''}$ zu verschiedenen ℓ' und ℓ'' voneinander linear unabhängig sind, können wir die Koeffizienten davon auf beiden Seiten vergleichen. Das Ergebnis ist somit:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} x^p e^{-x} L_{\ell'}^{\alpha'}(x) L_{\ell''}^{\alpha''}(x) dx = \Gamma(p+1) (-1)^{\ell'+\ell''} \cdot \\
 \cdot \sum_{\ell} (-1)^{\ell} \binom{p-\alpha'}{\ell'-\ell} \binom{p-\alpha''}{\ell''-\ell} \binom{-p-1}{\ell}
 \end{aligned} \tag{F.7}$$

wobei

$$\binom{x}{m} = \frac{\Gamma(x+1)}{m! \Gamma(x-m+1)}, \quad x \geq 0$$

und

$$\binom{-x}{m} = (-1)^m \binom{-x+m-1}{m}, \quad x \geq 0$$

gilt.

ANHANG (H)

Grenzfall von $E_{n\lambda}$ für die Yrast-Zustände

$$E_{n\lambda} = \hbar \omega_2 (2n + \sqrt{(\lambda + \frac{3}{2})^2 + t^4} + 1) \quad (\text{H.1})$$

Für die Yrast-Zustände gilt $n=0$ und $\lambda = \frac{L}{2}$. Wenn wir in (H.1) das t^4 aus der Quadratwurzel ziehen, bekommen wir:

$$E_{n\lambda} = \hbar \omega_2 (t^2 \sqrt{(L+3)^2 / (4t^4) + 1} + 1) \quad (\text{H.2})$$

Mit $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ für $x \ll 1$ ergibt sich für $x = \frac{(L+3)^2}{4t^4} \ll 1$ ($t \gg 1$):

$$\begin{aligned} E_{n\lambda} &\approx \hbar \omega_2 (t^2 (1 + \frac{1}{2} \frac{(L+3)^2}{4t^4}) + 1) = \\ &= \hbar \omega_2 (t^2 + \frac{(L+3)^2}{8t^2} + 1) \end{aligned} \quad (\text{H.3})$$

Der Grundzustand ($n=0, L=0$) ist damit durch

$$E_{00} \approx \hbar \omega_2 (t^2 + \frac{9}{8t^2} + 1) \quad (\text{H.4})$$

gegeben. Deshalb folgt für $\Delta E_{n\lambda} = E_{n\lambda} - E_{00}$

$$\Delta E_{n\lambda} \approx \frac{\hbar \omega_2}{2 \cdot 4 t^2} L(L+6) \quad (\text{H.5})$$

$\frac{\hbar \omega}{t^2}$ wird etwas umgeformt:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{C_2}{B_2}} \quad \text{und} \quad t^2 = \left[\frac{C_{-2} B_2}{\hbar^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{H.6})$$

Da $\beta_0 = \frac{t^4}{5} = \frac{C_{-2} B_2}{5}$ gilt, erhalten wir:

$$\frac{\hbar \omega_2}{t^2} = \frac{\hbar^2}{\beta_0^2 B_2} \quad (\text{H.7})$$

Wird dies in (H.5) eingesetzt, so ist das Endresultat:

$$\Delta E_{n\lambda} \approx \frac{\hbar^2}{2\theta_0} L(L+6) \quad (\text{H.8})$$

mit

$$\theta_0 = 4 B_2 \beta_0^2$$

Wie zu sehen ist, hat (H.8) eine ähnliche Form wie beim starren Rotator, nur dass $L(L+1)$ in $L(L+6)$ übergeht!

ANHANG (I)

Kinetische Matrixelemente in der
deformierten Basis

Es werden dazu die Kommutatoren

$$[\alpha_{2m}, H_0]$$

und

$$[\pi_{2m}^*, H_0]$$

benötigt. H_0 der Basis hat die Form

$$H_0 = \frac{1}{2B_2} \sum_{m'} \pi_{2m'}^* \pi_{2m'} + \frac{C_2}{2} \sum_{m'} \alpha_{2m'}^* \alpha_{2m'} + \frac{C-2}{2 \sum_{m'} \alpha_{m'}^* \alpha_{m'}} \quad (\text{I.1})$$

Damit ist die Berechnung der Kommutatoren einfach, falls

$$[\pi_{2m}, \alpha_{2m'}] = -i\hbar \delta_{mm'}$$

und

$$\pi_{2m}^* = -(-1)^m \pi_{2-m}$$

benutzt wird. Das Ergebnis ist:

$$[\alpha_{2m}, H_0] = -\frac{i\hbar}{B_2} \pi_{2m}^* \quad (\text{I.2a})$$

und

$$[\pi_{2m}^*, H_0] = i\hbar C_2 \alpha_{2m} - i\hbar C-2 \frac{\alpha_{2m}}{(\alpha\alpha)^2} \quad (\text{I.2b})$$

(i) Matrixelemente von $(\pi\pi)$:

Um sie zu bekommen muss der Doppelkommutator

$$[[\alpha\alpha], H_0], H_0]$$

berechnet werden. Das Ergebnis ist:

$$[[\alpha\alpha], H_0], H_0] = -\frac{2\hbar^2}{B_2} (\pi\pi) + \frac{2\hbar^2 C_2}{B_2} (\alpha\alpha) - \frac{2\hbar^2 C-2}{B_2} \frac{1}{(\alpha\alpha)}$$

oder

$$(\pi\pi) = C_2 B_2 (\alpha\alpha) - C_{-2} B_2 \frac{1}{(\alpha\alpha)} - \frac{B_2^2}{2\hbar^2} [[(\alpha\alpha), H_0], H_0] \quad (I.3)$$

Die Matrixelemente dieses Ausdrucks sind:

$$\begin{aligned} \langle n'\lambda' | (\pi\pi) | n\lambda \rangle &= C_2 B_2 \langle n'\lambda' | (\alpha\alpha) | n\lambda \rangle - \\ &- C_{-2} B_2 \langle n'\lambda' | \frac{1}{(\alpha\alpha)} | n\lambda \rangle - \\ &- \frac{B_2^2}{2\hbar^2} \langle n'\lambda' | [[(\alpha\alpha), H_0], H_0] | n\lambda \rangle \end{aligned} \quad (I.4)$$

Der letzte Term in (I.4) ist leicht zu berechnen, falls folgende Relation benutzt wird:

$$\begin{aligned} H_0 |n\lambda\rangle &= E_{n\lambda} |n\lambda\rangle, \text{ wobei} \\ E_{n\lambda} &= \hbar \omega_2 (2n + \sqrt{(\lambda + \frac{3}{2})^2 + t^4} + 1) = \hbar \omega_2 f_{n\lambda} \end{aligned} \quad (I.5)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle n'\lambda' | [[(\alpha\alpha), H_0], H_0] | n\lambda \rangle &= \\ &= \langle n'\lambda' | (\alpha\alpha) | n\lambda \rangle (E_{n\lambda} - E_{n'\lambda'})^2 \end{aligned} \quad (I.6)$$

Wird das in (I.4) eingesetzt, so ist das endgültige Ergebnis:

$$\begin{aligned} \langle n'\lambda' | (\pi\pi) | n\lambda \rangle &= (C_2 B_2 - \frac{B_2^2}{2\hbar^2} (E_{n\lambda} - E_{n'\lambda'})^2) \cdot \langle n'\lambda' | (\alpha\alpha) | n\lambda \rangle - \\ &- C_{-2} B_2 \langle n'\lambda' | \frac{1}{(\alpha\alpha)} | n\lambda \rangle \end{aligned}$$

Wenn wir von den Ausdruck für $E_{n\lambda}$ in (I.4) einsetzen und benutzen, so erhalten wir

$$\langle n'\lambda' | (\pi\pi) | n\lambda \rangle = \hbar \sqrt{C_2 B_2} \left[\left(1 - \frac{1}{2} (f_{n\lambda} - f_{n'\lambda'})^2 \right) \langle n'\lambda' | (\alpha\alpha) | n\lambda \rangle - t^4 \langle n'\lambda' | \frac{1}{(\alpha\alpha)} | n\lambda \rangle \right] \quad (I.7)$$

(ii) Matrixelemente von $\{[\pi^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \pi^{[2]}]^{[0]}_0\}$:

$$\begin{aligned} \{[\pi^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \pi^{[2]}]^{[0]}_0\} &= ([\pi^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \pi^{[2]}]^{[0]}_0 + \\ &+ [[\alpha^{[2]} \times \pi^{[2]}]^{[2]} \times \pi^{[2]}]^{[0]}_0 + [[\pi^{[2]} \times \pi^{[2]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]}_0) \end{aligned} \quad (I.8)$$

Wenn der Doppelkommutator

$$\begin{aligned}
 & [[([[\alpha^{(2)} \times \alpha^{(2)}]^{(2)}] \times \alpha^{(2)})^{(0)}, H_0], H_0] \\
 & \text{berechnet wird, so ist das Ergebnis davon} \\
 & [[([[\alpha^{(2)} \times \alpha^{(2)}]^{(2)}] \times \alpha^{(2)})^{(0)}, H_0], H_0] = \\
 & = -2 \frac{\hbar^2}{B_2} \{ [[\pi^{(2)} \times \alpha^{(2)}]^{(2)}] \times \pi^{(2)} \}^{(0)} + 3 \frac{C_2 \hbar^2}{2} [[\alpha^{(2)} \times \alpha^{(2)}]^{(2)}] \times \alpha^{(2)} \}^{(0)} \\
 & \quad - \frac{3 C_2 \hbar^2}{B_2} \frac{[[\alpha^{(2)} \times \alpha^{(2)}]^{(2)}] \times \alpha^{(2)} \}^{(0)}}{(\alpha\alpha)^2} \quad (I.9)
 \end{aligned}$$

Für die Matrixelemente erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
 & \langle n' \lambda' | \frac{1}{3} \{ [[\pi^{(2)} \times \alpha^{(2)}]^{(2)}] \times \pi^{(2)} \}^{(0)} | n \lambda \rangle = \\
 & = \left(\frac{\hbar^3 C_2}{\omega_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} (f_{n\lambda} - f_{n'\lambda'})^2 \right) \langle n' \lambda' | [[\alpha^{(2)} \times \alpha^{(2)}]^{(2)}] \times \alpha^{(2)} \}^{(0)} | n \lambda \rangle - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} \hbar^4 \langle n' \lambda' | \frac{[[\alpha^{(2)} \times \alpha^{(2)}]^{(2)}] \times \alpha^{(2)} \}^{(0)}}{(\alpha\alpha)^2} | n \lambda \rangle \right] \quad (I.10)
 \end{aligned}$$

(iii) Matrixelemente von $\{ [[\pi^{(2)} \times \pi^{(2)}]^{(2)}] \times [\alpha^{(2)} \times \alpha^{(2)}]^{(2)} \}^{(0)}$:

Die Methode dies zu berechnen ist dieselbe wie in (i) und (ii). ($l=0, 2, 4$)

$$\begin{aligned}
 & [[([[\alpha^{(2)} \times \alpha^{(2)}]^{(2)}] \times [\alpha^{(2)} \times \alpha^{(2)}]^{(2)} \}^{(2)}], H_0], H_0] = \\
 & = -2 \frac{\hbar^2}{B_2} \{ [[\pi^{(2)} \times \pi^{(2)}]^{(2)}] \times [\alpha^{(2)} \times \alpha^{(2)}]^{(2)} \}^{(0)} + \\
 & \quad + 4 \frac{\hbar^2 C_2}{B_2} [[\alpha^{(2)} \times \alpha^{(2)}]^{(2)}] \times [\alpha^{(2)} \times \alpha^{(2)}]^{(2)} \}^{(0)} - \\
 & \quad - 4 \frac{\hbar^2 C_2}{B_2} \frac{[[\alpha^{(2)} \times \alpha^{(2)}]^{(2)}] \times [\alpha^{(2)} \times \alpha^{(2)}]^{(2)} \}^{(0)}}{(\alpha\alpha)^2} \quad (I.11)
 \end{aligned}$$

Die Matrixelemente sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
\langle n'\lambda' | \frac{1}{6} \{ [[\pi^{[2]}_x \pi^{[2]}]^{[1]}_x [\alpha^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[2]}]^{[0]} \} | n\lambda \rangle &= \\
= \hbar^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12} (f_{n\lambda} - f_{n'\lambda'})^2 \right) \langle n'\lambda' | [[\alpha^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[1]}_x [\alpha^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[2]}]^{[0]} | n\lambda \rangle \right. & \quad (I.12) \\
\left. - \frac{\hbar^4}{3} \delta_{n'n} \delta_{\lambda'\lambda} \langle n'\lambda' | \frac{[[\alpha^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[1]}_x [\alpha^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[2]}]^{[0]} }{(\alpha\alpha)^2} | n\lambda \rangle \right]
\end{aligned}$$

Für den Fall, dass $\alpha = 0$ ist, ist dies gerade

$$\begin{aligned}
\langle n'\lambda' | \frac{1}{6} \{ [[\pi^{[2]}_x \pi^{[2]}]^{[0]} [\alpha^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[0]}]^{[0]} \} | n\lambda \rangle &= \\
= \hbar^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12} (f_{n\lambda} - f_{n'\lambda'})^2 \right) \langle n'\lambda' | ([\alpha^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[0]})^2 | n\lambda \rangle - \right. & \quad (I.13) \\
\left. - \frac{\hbar^4}{3} \delta_{n'n} \delta_{\lambda'\lambda} \frac{1}{5} \right]
\end{aligned}$$

ANHANG (J)

Der Hamiltonoperator ist

$$H = T + V$$

mit

$$T = \frac{\sqrt{5}}{2B_2} [\pi^{[2]}_x \pi^{[2]}]^{[0]} + \frac{P_3}{3} \{ [[\pi^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[2]}_x \pi^{[2]}]^{[0]} \} + \frac{P_4}{6} \{ [\pi^{[2]}_x \pi^{[2]}]^{[0]} [\alpha^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[0]} \} \quad (J.1a)$$

$$\text{und} \quad V = \sum_{s,m} V_{s,m} \beta^s (\cos 3\gamma)^m \quad (J.1b)$$

Die Gesamtwellenfunktion teilt sich auf in einen Radialanteil $|n\lambda\rangle$ und Winkelanteil $|\lambda\mu L M\rangle$:

$$|n\lambda\mu L M\rangle = |n\lambda\rangle |\lambda\mu L M\rangle \quad (J.2)$$

Zu berechnen ist

$$\sum_{i=1}^K \langle n\lambda\mu L=0 M=0 | H | n\lambda\mu L=0 M=0 \rangle \quad (J.3)$$

Da nur Diagonalelemente betrachtet werden, d.h. $\Delta\lambda = 0$, tragen nur die Terme zu $M=\text{gerade}$ bei, da sonst $\Delta\lambda \neq 0$ wäre. Die gleichen Argumente gelten für den P_3 -Term. Gemäss der Gradientenformel (II.125) und (II.139a) gilt für die kinetischen Matrixelemente (ohne P_3 -Term): ($t=0$)

$$\begin{aligned} \langle n\lambda | \frac{\sqrt{5}}{2} [\pi^{[2]}_x \pi^{[2]}]^{[0]} | n\lambda \rangle &= \left(\frac{c_2}{\omega_2} \right)^2 \frac{1}{2s^2} \langle n\lambda | \beta^2 | n\lambda \rangle = \\ &= \frac{\hbar^2 s^2}{2} \langle n\lambda | \beta^2 | n\lambda \rangle \end{aligned} \quad (J.4a)$$

$$\begin{aligned} \langle n\lambda | \{ [[\pi^{[2]}_x \pi^{[2]}]^{[0]} [\alpha^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[0]} \} | n\lambda \rangle &= \\ = \left(\frac{c_2}{\omega_2} \right)^2 \frac{1}{s^4} \frac{1}{5} \langle n\lambda | \beta^4 | n\lambda \rangle &= \frac{\hbar^2}{5} \langle n\lambda | \beta^4 | n\lambda \rangle \end{aligned} \quad (J.4b)$$

Da (J.4a) nur ein konstanter Term in s ist, kann auch dieses aus der Betrachtung herausgezogen werden! Daraus folgt für

die Diagonalelemente:

$$\begin{aligned} \langle \nu \lambda m 0 0 | H | \nu \lambda m 0 0 \rangle = & \frac{\hbar^2}{B_2} \left[\frac{1}{2} \langle n \lambda | \beta^2 | n \lambda \rangle s^2 + \right. \\ & \left. + \sum_s \left(\sum_{m'} \frac{V_{sm} \cdot B_2}{\hbar^2} \langle \lambda m 0 0 | (\cos 3\gamma)^m | \lambda m 0 0 \rangle \langle n \lambda | \beta^s | n \lambda \rangle s^{-s} \right) \right] \quad (J.5) \end{aligned}$$

Die Matrixelemente für $\langle n \lambda | \beta^s | n \lambda \rangle$ sind aus den Formeln (II.139b) zu berechnen, während diejenigen von $(\cos 3\gamma)^m$ die folgende Form haben:

$$\langle \lambda m 0 0 | (\cos 3\gamma)^m | \lambda m 0 0 \rangle = \frac{2^{m+1}}{2} \int_0^\pi P_m(\cos 3\gamma) (\cos 3\gamma)^m \cdot P_m(\cos 3\gamma) \sin 3\gamma d\gamma \quad (J.6)$$

Dieses Integral ist in fast jeder Formelsammlung zu finden.

ANHANG (K)

Betrachtet werden die Matrixelemente der $P_{4\ell}$ -Terme:

$$\langle \nu' \lambda' \mu' L M | \sum_{\ell} \frac{\tilde{P}_{4\ell}}{6} \{ [[\pi^{[2]} \pi^{[2]}]^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \alpha^{[2]}]^{[2]}]^{[0]} \} | \nu \lambda \mu L M \rangle \quad (K.1)$$

Dabei gilt nach Tabelle II.8

$$\begin{aligned} \langle \nu' \lambda' \mu' L M | \{ [[\pi^{[2]} \pi^{[2]}]^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \alpha^{[2]}]^{[2]}]^{[0]} \} | \nu \lambda \mu L M \rangle &= \\ = f(\Delta \nu) \langle \nu' \lambda' \mu' L M | [[\alpha^{[2]} \alpha^{[2]}]^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \alpha^{[2]}]^{[2]}]^{[0]} | \nu \lambda \mu L M \rangle & \quad (K.2) \end{aligned}$$

Die Funktion $f(\Delta \nu)$ interessiert uns hier nicht, nur dass sie nicht von den anderen Quantenzahlen abhängt! In Ref.(1,6) ist gezeigt, dass

$$[[\alpha^{[2]} \alpha^{[2]}]^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \alpha^{[2]}]^{[2]}]^{[0]} = g(\ell) ([\alpha^{[2]} \alpha^{[2]}]^{[0]})^2 \quad (K.3)$$

gilt, mit einer Funktion $g(\ell)$, die nur von ℓ abhängt.

Werden (K.2) und (K.3) in (K.1) benutzt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle \nu' \lambda' \mu' L M | \sum_{\ell} \frac{\tilde{P}_{4\ell}}{6} \{ [[\pi^{[2]} \pi^{[2]}]^{[2]} \times [\alpha^{[2]} \alpha^{[2]}]^{[2]}]^{[0]} \} | \nu \lambda \mu L M \rangle &= \\ = \left(\sum_{\ell} \tilde{P}_{4\ell} g(\ell) \right) \frac{f(\Delta \nu)}{6} \langle \nu' \lambda' \mu' L M | ([\alpha^{[2]} \alpha^{[2]}]^{[0]})^2 | \nu \lambda \mu L M \rangle & \quad (K.4) \end{aligned}$$

mit

$$\sum_{\ell} \tilde{P}_{4\ell} g(\ell) = P_4 \quad (K.5)$$

das unabhängig von ℓ ist (!), erhalten wir Matrixelemente der Form:

$$P_{40} \frac{f(\Delta \nu)}{6} \langle \nu' \lambda' \mu' L M | ([\alpha^{[2]} \alpha^{[2]}]^{[0]})^2 | \nu \lambda \mu L M \rangle \quad (K.6)$$

Dasgleiche Ergebnis hätten wir erreicht, wenn anstatt (K.1) nur der $\tilde{P}_{40}$ -Term mitgenommen wird. In diesem Fall wäre dann $P_4 = \tilde{P}_{40}$. (K.5) zeigt bereits, dass zwei der $\tilde{P}_{4\ell}$ -Terme überflüssig sind!

ANHANG (L)

Gradient von :

$$\chi^2 = \chi_E^2 + \chi_B^2 + \chi_Q^2 \quad (\text{L.1})$$

$$\chi_E^2 = \sum_{i=1}^{N_E} \frac{(\Delta E_i^c(c_m) - \Delta E_i^{ex})^2}{\Delta E_i^{ex2}} \quad (\text{L.1a})$$

$$\chi_B^2 = \sum_{j=1}^{N_B} (\log_{10} BE2_j^c(c_m) - \log_{10} BE2_j^{ex})^2 \quad (\text{L.1b})$$

$$\chi_Q^2 = \sum_{k=1}^{N_Q} \frac{(Q_k^c(c_m) - Q_k^{ex})^2}{Q_k^{ex2}} \quad (\text{L.1c})$$

Der Hamiltonoperator habe dabei die Form

$$H = \sum_{\alpha} c_{\alpha} h_{\alpha} \quad (\text{L.2})$$

mit c_{α} als Parameter.

(a) χ_E^2

Der Gradient von χ_E^2 ist durch

$$\frac{\partial \chi_E^2}{\partial c_{\alpha}} = 2 \sum_{i=1}^{N_E} \frac{(\Delta E_i^c(c_m) - \Delta E_i^{ex})}{\Delta E_i^{ex2}} \frac{\partial \Delta E_i^c(c_m)}{\partial c_{\alpha}} \quad (\text{L.3})$$

gegeben. Aus Der Störungstheorie wissen wir, dass

$$\frac{\partial E_i^c(c_m)}{\partial c_{\alpha}} = \langle \psi_i(c_m) | h_{\alpha} | \psi_i(c_m) \rangle \quad (\text{L.4})$$

ist, D.h. mit $\Delta E_i^c(c_m) = E_i^c(c_m) - E_0^c(c_m)$, wobei E_0^c der berechnete Grundzustand ist, gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta E_i^c(c_m)}{\partial c_{\alpha}} &= \langle \psi_i(c_m) | h_{\alpha} | \psi_i(c_m) \rangle - \langle \psi_0(c_m) | h_{\alpha} | \psi_0(c_m) \rangle = \\ &= \frac{\partial E_i^c}{\partial c_{\alpha}} - \frac{\partial E_0^c}{\partial c_{\alpha}} \end{aligned} \quad (\text{L.5})$$

Im Programm ist es allerdings so, dass die Energien zunächst

noch nicht absolut berechnet werden, sondern ein Zustand, z.B. 2_1^+ oder 6_1^+ , mit einem Faktor "FAC" so multipliziert wird, dass er exakt mit dem Experiment übereinstimmt. D.h. eigentlich steht in (L.1a) nicht ΔE_i^c sondern $\text{FAC} \cdot E_i^c$. Wenn z.B der 6_1^+ -Zustand der exakt angepasste sein soll, so hat er die Form:

$$\text{FAC} = E_{6_1^+}^{\text{ex}} / (E_{6_1^+}^c - E_0^c) \quad (\text{L.6a})$$

Und dessen Ableitung ist

$$\frac{\partial \text{FAC}}{\partial C_\alpha} = - \frac{E_{6_1^+}^{\text{ex}}}{(E_{6_1^+}^c - E_0^c)} \left(\frac{\partial E_{6_1^+}^c}{\partial C_\alpha} - \frac{\partial E_0^c}{\partial C_\alpha} \right) \quad (\text{L.6b})$$

Für die Ableitung von $\Delta E_i^c(C_m)$ folgt somit:

$$\frac{\partial \Delta E_i^c}{\partial C_\alpha} = \text{FAC} \left(\frac{\partial E_i^c}{\partial C_\alpha} - \frac{\partial E_0^c}{\partial C_\alpha} \right) + \frac{\partial \text{FAC}}{\partial C_\alpha} (E_i^c - E_0^c) \quad (\text{L.7})$$

Mit (L.7), (L.6b) und (L.4) erhält man dann die partielle Ableitung von χ_E^2 in (L.3) nach C_α .

Hier ist ein glücklicher Umstand zu erkennen: Hätte der Hamiltonoperator H nicht die Form wie in (L.2), so würden nicht diese einfachen Formeln gelten und man müsste χ_E^2 an zwei Stellen bestimmen, um die Ableitung zu erhalten. Dies würde die Rechenzeit verdoppeln!

(b) χ_B^2

Die Ableitung von χ_B^2 aus (L.1b) ist:

$$\frac{\partial \chi_B^2}{\partial C_\alpha} = 2 \sum_{j=1}^{N_B} \frac{(\log_{10} \text{BE}2_j^c(C_m) - \log_{10} \text{BE}2_j^{\text{ex}})}{\text{BE}2_j^c(C_m)} \frac{\partial \text{BE}2_j^c}{\partial C_\alpha} \quad (\text{L.8})$$

Dabei ist $\text{BE}2$ abstrakt durch

$$\text{BE}2_j^c = |\langle \psi_{j1} | Q | \psi_{j2} \rangle|^2 \quad (\text{L.9})$$

gegeben. Dabei ist $\langle \psi_{j1} | Q | \psi_{j2} \rangle$ bis auf Vorfaktoren proportional zum reduzierten Matrixelement des Quadrupoloperators. Die ψ_{j1}, ψ_{j2} sind verschiedene Wellenfunktionen zwischen denen der Übergang betrachtet wird. Die Ableitung ist:

$$\frac{\partial E_2}{\partial c_\alpha} = 2 \langle \psi_{j1} | Q | \psi_{j2} \rangle \left(\langle \frac{\partial \psi_{j1}}{\partial c_\alpha} | Q | \psi_{j2} \rangle + \langle \psi_{j1} | Q | \frac{\partial \psi_{j2}}{\partial c_\alpha} \rangle \right) \quad (L.10)$$

Q selbst hängt nicht von den Parametern ab. Um (L.10) zu berechnen, muss also die Ableitung von ψ_{j1} und ψ_{j2} nach c_α bestimmt werden.

Dazu gehen wir von der Schrödingergleichung aus und variieren nach c_α :

$$\frac{\partial H}{\partial c_\alpha} |\psi_j\rangle + H \left| \frac{\partial \psi_j}{\partial c_\alpha} \right\rangle = \frac{\partial E_j}{\partial c_\alpha} |\psi_j\rangle + E_j \left| \frac{\partial \psi_j}{\partial c_\alpha} \right\rangle \quad (L.11)$$

Wenn ϕ_n ($n=1, \dots$) die Basisfunktionen sind, dann gilt

$$\langle \phi_n | H - E_j | \frac{\partial \psi_j}{\partial c_\alpha} \rangle = \langle \phi_n | \frac{\partial E_j}{\partial c_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial c_\alpha} | \psi_j \rangle \quad (L.12)$$

Unter Benutzung der Vollständigkeitsrelation

$$\sum_m |\phi_m\rangle \langle \phi_m| = \mathbb{1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial c_\alpha} = h_\alpha$$

gilt

$$\begin{aligned} \sum_m \langle \phi_n | H - E_j | \phi_m \rangle \langle \phi_m | \frac{\partial \psi_j}{\partial c_\alpha} \rangle &= \\ &= \sum_m \langle \phi_n | \frac{\partial E_j}{\partial c_\alpha} - h_\alpha | \phi_m \rangle \langle \phi_m | \psi_j \rangle \end{aligned} \quad (L.13)$$

Dies ist eine Matrixgleichung der Form

$$[\underline{H} - E_j \underline{1}] \left(\underline{\frac{\partial \psi_j}{\partial c_\alpha}} \right) = \left[\underline{\frac{\partial E_j}{\partial c_\alpha}} \underline{1} - \underline{h_\alpha} \right] \left(\underline{\psi_j} \right) \quad (L.14)$$

In die Matrix auf der linken Seite wird noch $\varepsilon |\psi_j\rangle \langle \psi_j|$ hinzugefügt, was an der Gleichung nichts ändert, da $\psi_j \perp \frac{\partial \psi_j}{\partial c_\alpha}$ ($\vec{\psi}_j \cdot \vec{\psi}_j = 1 \Rightarrow \vec{\psi}_j \cdot \frac{\partial \vec{\psi}_j}{\partial c_\alpha} = 0$). Dadurch wird die Determinante von

$$[\underline{H} - E_j \underline{1} + \varepsilon |\psi_j\rangle \langle \psi_j|]$$

ungleich Null, also invertierbar. Das Ergebnis ist schliesslich

$$\frac{\partial \vec{\psi}_j}{\partial c_\alpha} = [\underline{H} - E_j \underline{1} + \epsilon |\psi_j\rangle \langle \psi_j|]^{-1} \left[\frac{\partial E_j}{\partial c_\alpha} \underline{1} - \underline{h}_\alpha \right] \vec{\psi}_j \quad (\text{L.15})$$

Für ϵ wird ein beliebiger Wert (z.B. 1keV) eingesetzt.

(c) x_Q^2

Die Ableitung von (L.1c) ist:

$$\frac{\partial x_Q^2}{\partial c_\alpha} = 2 \sum_{k=1}^{N_Q} \frac{(Q_k^c(c_\alpha) - Q_k^{ex})}{Q_k^{ex2}} \frac{\partial Q_k^c}{\partial c_\alpha} \quad (\text{L.16})$$

Da Q_k^c die Form

$$Q_k^c = a \langle \psi_k | Q | \psi_k \rangle$$

besitzt, mit $\langle \psi_k | Q | \psi_k \rangle$ proportional zum reduzierten Matrixelement des Quadrupoloperators, ist die Ableitung von Q_k^c gegeben durch:

$$\frac{\partial Q_k^c}{\partial c_\alpha} = 2 \left\langle \frac{\partial \psi_k}{\partial c_\alpha} \middle| Q \middle| \psi_k \right\rangle \quad (\text{L.17})$$

(Die Matrixelemente sind reell!!)

Die Ableitung von ψ_k nach c_α ist aus (L.15) zu entnehmen.

ANHANG (M)

Exakte Anpassungsmöglichkeit
eines BE2-Wertes oder Quadrupolmomentes

Gesucht ist eine Transformation des kollektiven Hamilton-operators in einen neuen, d.h.:

$$H(\alpha, \pi) \psi(\alpha) = E \psi(\alpha) \quad (\text{M.1a})$$

$$H(\alpha', \pi') \psi(\alpha') = E \psi(\alpha'), \quad (\text{M.1b})$$

wobei die Energien nicht verändert werden! Die funktionale Abhängigkeit soll bei beiden gleich sein. Eine solche Transformation ist in Ref.(36) gegeben:

$$\alpha_{2m} \longrightarrow \alpha'_{2m} = a \alpha_{2m} \quad (\text{M.2a})$$

$$\pi_{2m} \longrightarrow \pi'_{2m} = \frac{1}{a} \pi_{2m} \quad (\text{M.2b})$$

Der Quadrupoloperator ist durch

$$Q_{2m} = 80 R_0^5 \left\{ \alpha_{2m} - \frac{10}{\sqrt{70\pi}} [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]}_m \right\} \quad (\text{M.3})$$

gegeben. Da er sich nicht ändern darf, aber die Wellenfunktion sich unter der kanonischen Transformation verändert, gilt für die einzelnen Terme (mit (M.2a)):

$$\begin{aligned} \langle \psi(\alpha) | \alpha_{2m} | \psi(\alpha) \rangle &\longrightarrow \langle \psi(\alpha') | \alpha_{2m} | \psi(\alpha') \rangle = \\ &= \frac{1}{a} \langle \psi(\alpha') | \alpha'_{2m} | \psi(\alpha') \rangle \end{aligned} \quad (\text{M.4a})$$

und

$$\begin{aligned} \langle \psi | \alpha \rangle | [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]}_m | \psi | \alpha \rangle \rangle &\rightarrow \langle \psi | \alpha' \rangle | [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]}_m | \psi | \alpha' \rangle \rangle = \\ &= \frac{1}{a^2} \langle \psi | \alpha' \rangle | [\alpha'^{[2]} \times \alpha'^{[2]}]^{[2]}_m | \psi | \alpha' \rangle \rangle \quad (\text{M. 4b}) \end{aligned}$$

Da die numerischen Werte für

$$\langle \psi | \alpha \rangle | (\alpha) | \psi | \alpha \rangle \rangle$$

dieselben sind wie für

$$\langle \psi | \alpha' \rangle | (\alpha') | \psi | \alpha' \rangle \rangle$$

haben die Matrixelemente des Quadrupoloperators die folgende Form:

$$\langle \psi | \alpha' \rangle | Q | \psi | \alpha' \rangle \rangle = \left[\frac{1}{a} A - \frac{1}{a^2} B \right] \quad (\text{M. 5})$$

Soll für $\langle \psi | \alpha' \rangle | Q | \psi | \alpha' \rangle \rangle$ der experimentelle Wert Q_{ex} herauskommen (es kann ein Quadrupolmoment oder $\sqrt{BE_2}$ sein), so ist (M. 5) eine quadratische Gleichung, die sofort gelöst werden kann:

$$a = \frac{A}{2Q_{\text{ex}}} + \sqrt{\frac{-B}{Q_{\text{ex}}} + \frac{A^2}{4Q_{\text{ex}}^2}} \quad (\text{M. 6})$$

a ist so zu wählen, dass es positiv ist, denn ein negatives a ($\alpha_{2m} \rightarrow -\alpha_{2m}$, $\pi_{2m} \rightarrow -\pi_{2m}$) entspricht gerade der Spiegelung an der 30° -Achse. Oblate Potentialflächen gehen in prolate über und umgekehrt.

ANHANG (Pt)

Parameter des Pt-Isotops:

 $^{186}_{78}\text{Pt}$ (Z=78, A=186)

$$E_2 = 72.1988 \cdot 10^{-42} \text{ MEV sec}^2 \quad .$$

$$P_3 = -0.08451 \cdot 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$P_4 = 0.0 \cdot 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$V_{20} = -412.7302 \text{ MEV}, \quad V_{30} = -10.7800 \text{ MEV}$$

$$V_{40} = 3665.8052 \text{ MEV}, \quad V_{50} = -0.9550 \text{ MeV}$$

$$V_{60} = -0.1622 \text{ MEV}, \quad V_{21} = -19.7818 \text{ Mev}$$

$$V_{31} = -172.8450 \text{ MEV}, \quad V_{41} = 0.0 \text{ MEV}$$

$$V_{51} = 1252.0361 \text{ MEV}, \quad V_{22} = -45.6976 \text{ Mev}$$

$$V_{32} = -6.1416 \text{ MEV}, \quad V_{42} = 0.0 \text{ Mev}$$

$$V_{62} = -4049.8386 \text{ MEV}, \quad V_{23} = 51.8671 \text{ MEV}$$

$$V_{33} = 13.6389 \text{ MEV}, \quad V_{24} = 0.6835 \text{ MEV}$$

$$V_{34} = -2.5533 \text{ MEV},$$

Alle anderen Terme sind Null!

$^{186}_{78}\text{Pt}$

Energien

Sehr oft wird die Zuordnung der Zustände zu den Banden unmöglich, da eine starke Wechselwirkung eintritt. In solchen Fällen wurde kein Wert angegeben. Aufgrund der grossen Datenfülle können hier nur einige Daten wiedergegeben werden. Die experimentellen, sofern vorhanden, sind in den Klammern angegeben. (g=Grundzustandsbande), (Einheit: MEV)

	g	γ	β	$\gamma\gamma$	β'
0 ⁺	0.0		0.472 (0.472)		1.398
2 ⁺	0.152 (0.152)	0.772 (0.798)	0.524 (0.607)		1.588
3 ⁺		0.935 (0.991)			
4 ⁺	0.481 (0.490)	1.137 (1.223)	0.658	1.601	1.844
5 ⁺		1.381		1.937	
6 ⁺	0.961 (0.877)	1.651	0.856	2.277	
7 ⁺		1.963		2.579	
8 ⁺	1.562	2.249	1.122	2.948	
9 ⁺	(1.341)	2.659		3.323	
10 ⁺	2.273	3.076	1.448	3.695	

¹⁸⁶₇₈Pt: BE2-Werte innerhalb von Banden

In Klammern werden die experimentellen Werte angegeben.
(Einheit für die BE2-Werte: $e^2 b^2$, für die Quadrupolmomente: eb)

	ξ	β
$0^+ \longrightarrow 2^+$	3.994 (2.95 ± 0.15)	2.983
$2^+ \longrightarrow 4^+$	2.080	1.552
$4^+ \longrightarrow 6^+$	1.840	1.362
$6^+ \longrightarrow 8^+$	1.833	1.343
$8^+ \longrightarrow 10^+$	1.849	1.335

$$Q(2^+_{\xi}) = -1.765 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_{\gamma}) = 1.756 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_{\beta}) = 1.576 \text{ eb}$$

	γ
$2^+ \longrightarrow 3^+$	1.884
$2^+ \longrightarrow 4^+$	0.882
$3^+ \longrightarrow 4^+$	1.190
$4^+ \longrightarrow 5^+$	0.842
$4^+ \longrightarrow 6^+$	1.351
$5^+ \longrightarrow 6^+$	0.513
$6^+ \longrightarrow 7^+$	0.445
$6^+ \longrightarrow 8^+$	0.921
$7^+ \longrightarrow 8^+$	0.127
$8^+ \longrightarrow 9^+$	0.151
$8^+ \longrightarrow 10^+$	0.600
$9^+ \longrightarrow 10^+$	0.174

¹⁸⁶₇₈Pt: BE2-Werte zwischen den Banden

Die Zahlen in den Klammern geben die experimentellen Werte an. (Einheit: $e^2 b^2$)

$0_g^+ \longrightarrow 2_g^+$	0.030
$0_g^+ \longrightarrow 2_\beta^+$	0.001
$2_g^+ \longrightarrow 2_g^+$	0.062
$2_g^+ \longrightarrow 2_\beta^+$	0.010
$2_g^+ \longrightarrow 4_g^+$	0.004
$2_g^+ \longrightarrow 4_\beta^+$	0.003
$4_g^+ \longrightarrow 4_g^+$	0.069
$4_g^+ \longrightarrow 4_\beta^+$	0.017
$4_g^+ \longrightarrow 6_g^+$	0.017
$4_g^+ \longrightarrow 6_\beta^+$	0.049
$6_g^+ \longrightarrow 6_g^+$	0.071
$6_g^+ \longrightarrow 6_\beta^+$	0.037
$0_\beta^+ \longrightarrow 2_g^+$	0.066
$2_\beta^+ \longrightarrow 2_\beta^+$	0.000

Parameter des Pt-Isotops:

$^{188}_{78}\text{Pt}$ ($Z=78, A=188$)

$$\begin{aligned} E_2 &= 57.2279 * 10^{-42} \text{ MEV sec}^2 \quad . \\ P_3 &= -0.1058 * 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad . \\ P_4 &= 0.0 \quad * 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{20} &= -493.4712 \text{ MEV}, & V_{30} &= -3.1531 \text{ MEV} \\ V_{40} &= 4628.4258 \text{ MEV}, & V_{50} &= -0.0503 \text{ MeV} \\ V_{60} &= 0.1558 \text{ MEV}, & V_{21} &= -4.8858 \text{ MeV} \\ V_{31} &= -215.3838 \text{ MEV}, & V_{41} &= 0.0 \text{ MEV} \\ V_{51} &= 1579.5039 \text{ MEV}, & V_{22} &= -22.6088 \text{ MeV} \\ V_{32} &= 3.8851 \text{ MFV}, & V_{42} &= 0.0 \text{ MeV} \\ V_{62} &= -5109.3594 \text{ MEV}, & V_{23} &= 37.9380 \text{ MEV} \\ V_{33} &= 9.2515 \text{ MEV}, & V_{24} &= 15.7733 \text{ MEV} \\ & & V_{34} &= 2.5719 \text{ MEV}, \end{aligned}$$

Alle anderen Terme sind Null!

$^{188}_{78}\text{Pt}$

Energien

Sehr oft wird die Zuordnung der Zustände zu den Banden unmöglich, da eine starke Wechselwirkung eintritt. In solchen Fällen wurde kein Wert angegeben. Aufgrund der grossen Datenfülle können hier nur einige Daten widergegeben werden. Die experimentellen, sofern vorhanden, sind in den Klammern angegeben. (g=Grundzustandsbande), (Einheit: MEV)

	g	γ	β	$\gamma\gamma$	β'
0 ⁺	0.0		0.748 (0.798)		1.853
2 ⁺	0.262 (0.266)	0.558 (0.606)	1.126 (1.115)		1.913
3 ⁺		1.015 (0.936)			
4 ⁺	0.672 (0.671)	1.543	1.761 (1.625)	1.021	2.462
5 ⁺		2.230		1.655	
6 ⁺	1.183 (1.185)	2.980	2.540	2.277	
7 ⁺		3.782		3.074	
8 ⁺	1.766 (1.782)	3.901	3.397		
9 ⁺					
10 ⁺	2.411	4.784	4.304		

$^{188}_{78}\text{Pt}$: BE2-Werte innerhalb von Banden

In Klammern werden die experimentellen Werte angegeben.
(Einheit für die BE2-Werte: $e^2 b^2$, für die Quadrupolmomente: eb)

	g	β
$0^+ \longrightarrow 2^+$	3.033 (2.60 ± 0.45)	1.509
$2^+ \longrightarrow 4^+$	1.443	0.391
$4^+ \longrightarrow 6^+$	1.242	0.473
$6^+ \longrightarrow 8^+$	1.151	0.585
$8^+ \longrightarrow 10^+$	1.128	0.708

$$C(2^+_2) = -0.394 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_2) = 0.285 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_3) = 0.132 \text{ eb}$$

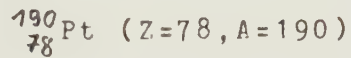
	δ
$2^+ \longrightarrow 3^+$	0.955
$2^+ \longrightarrow 4^+$	0.186
$3^+ \longrightarrow 4^+$	0.751
$4^+ \longrightarrow 5^+$	0.547
$4^+ \longrightarrow 6^+$	0.152
$5^+ \longrightarrow 6^+$	1.069
$6^+ \longrightarrow 7^+$	1.179
$6^+ \longrightarrow 8^+$	0.051
$7^+ \longrightarrow 8^+$	0.132
$8^+ \longrightarrow 9^+$	
$8^+ \longrightarrow 10^+$	
$9^+ \longrightarrow 10^+$	

¹⁸⁸Pt: BE2-Werte zwischen den Banden
78

Die Zahlen in den Klammern geben die experimentellen Werte an. (Einheit: $e^2 b^2$)

$0_g^+ \longrightarrow 2_g^+$	0.147
$0_g^+ \longrightarrow 2_\beta^+$	0.004
$2_g^+ \longrightarrow 2_g^+$	0.852
$2_g^+ \longrightarrow 2_\beta^+$	0.005
$2_g^+ \longrightarrow 4_g^+$	0.007
$2_g^+ \longrightarrow 4_\beta^+$	0.002
$4_g^+ \longrightarrow 4_g^+$	0.000
$4_g^+ \longrightarrow 4_\beta^+$	0.022
$4_g^+ \longrightarrow 6_g^+$	0.001
$4_g^+ \longrightarrow 6_\beta^+$	0.004
$6_g^+ \longrightarrow 6_g^+$	0.003
$6_g^+ \longrightarrow 6_\beta^+$	0.035
$0_\beta^+ \longrightarrow 2_g^+$	1.104
$2_g^+ \longrightarrow 2_\beta^+$	0.002

Parameter des Pt-Isotops:



$$B_2 = 55.5740 \cdot 10^{-42} \text{ MEV sec}^2 \quad .$$

$$P_3 = -0.1087 \cdot 10^{-42} / (\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$P_4 = 0.0 \cdot 10^{-42} / (\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$V_{20} = -502.9927 \text{ MEV}, \quad V_{30} = -1.2589 \text{ MEV}$$

$$V_{40} = 4766.6406 \text{ MEV}, \quad V_{50} = 0.1651 \text{ MeV}$$

$$V_{60} = 0.2275 \text{ MEV}, \quad V_{21} = -2.0464 \text{ Mev}$$

$$V_{31} = -222.1293 \text{ MEV}, \quad V_{41} = 0.0 \text{ MEV}$$

$$V_{51} = 1626.3801 \text{ MEV}, \quad V_{22} = -11.9219 \text{ Mev}$$

$$V_{32} = 6.7873 \text{ MEV}, \quad V_{42} = 0.0 \text{ Mev}$$

$$V_{62} = -5261.1836 \text{ MEV}, \quad V_{23} = 28.3533 \text{ MEV}$$

$$V_{33} = 6.0682 \text{ MEV}, \quad V_{24} = 19.1218 \text{ MEV}$$

$$V_{34} = 3.0918 \text{ MEV},$$

Alle anderen Terme sind Null!

$^{190}_{78}\text{Pt}$

Energien

Sehr oft wird die Zuordnung der Zustände zu den Banden unmöglich, da eine starke Wechselwirkung eintritt. In solchen Fällen wurde kein Wert angegeben. Aufgrund der grossen Datenfülle können hier nur einige Daten wiedergegeben werden. Die experimentellen, sofern vorhanden, sind in den Klammern angegeben. (g=Grundzustandsbande), (Einheit: MEV)

	g	γ	β	$\gamma\gamma$	β'
0 ⁺	0.0		0.963 (0.921)		2.200
2 ⁺	0.278 (0.296)	0.604 (0.598)	1.380 (1.204)		2.871
3 ⁺		1.034 (0.917)			
4 ⁺	0.716 (0.738)	1.656	1.975	1.155 (1.128)	
5 ⁺		2.316		1.696	
6 ⁺	1.282 (1.290)	2.728	3.116	2.472	
7 ⁺		3.958		3.195	
8 ⁺	1.957 (1.903)		3.594		
9 ⁺					
10 ⁺	2.718		4.538		

$^{190}_{78}\text{Pt}$: BE2-Werte innerhalb von Banden

In Klammern werden die experimentellen Werte angegeben.
(Einheit für die BE2-Werte: $e^2 b^2$, für die Quadrupolmomente: eb)

	g	β
$0^+ \longrightarrow 2^+$	2.968 (2.45 ± 0.70)	1.906
$2^+ \longrightarrow 4^+$	1.468	0.857
$4^+ \longrightarrow 6^+$	1.346	0.736
$6^+ \longrightarrow 8^+$	1.285	0.729
$8^+ \longrightarrow 10^+$	1.234	0.756

$$Q(2^+_2) = -0.312 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_8) = 0.241 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_9) = 0.981 \text{ eb}$$

	δ
$2 \longrightarrow 3$	1.131
$2 \longrightarrow 4$	0.207
$3 \longrightarrow 4$	0.776
$4 \longrightarrow 5$	0.950
$4 \longrightarrow 6$	0.216
$5 \longrightarrow 6$	1.046
$6 \longrightarrow 7$	1.156
$6 \longrightarrow 8$	
$7 \longrightarrow 8$	
$8 \longrightarrow 9$	
$8 \longrightarrow 10$	
$9 \longrightarrow 10$	

$^{190}_{78}\text{Pt}$: BE2-Werte zwischen den Banden

Die Zahlen in den Klammern geben die experimentellen Werte an. (Einheit: $e^2 b^2$)

$0^+_2 \longrightarrow 2^+_2$	0.175
$0^+_2 \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.005
$2^+_2 \longrightarrow 2^+_2$	0.870
$2^+_2 \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.000
$2^+_2 \longrightarrow 4^+_2$	0.005
$2^+_2 \longrightarrow 4^+_{\beta}$	0.003
$4^+_2 \longrightarrow 4^+_2$	0.003
$4^+_2 \longrightarrow 4^+_{\beta}$	0.006
$4^+_2 \longrightarrow 6^+_2$	0.000
$4^+_2 \longrightarrow 6^+_{\beta}$	0.003
$6^+_2 \longrightarrow 6^+_2$	0.000
$6^+_2 \longrightarrow 6^+_{\beta}$	0.017
$0^+_{\beta} \longrightarrow 2^+_2$	0.760
$2^+_2 \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.008

Parameter des Pt-Isotops:

$$^{192}_{78}\text{Pt} \quad (Z=78, A=192)$$

$$E_2 = 51.8993 \cdot 10^{-42} \text{ MEV sec}^2 \quad .$$

$$P_3 = 0.1192 \cdot 10^{-42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$P_4 = -0.00015 \cdot 10^{-42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$V_{20} = -549.8123 \text{ MEV}, \quad V_{30} = -6.3124 \text{ MEV}$$

$$V_{40} = 5102.4531 \text{ MEV}, \quad V_{50} = -0.4474 \text{ MeV}$$

$$V_{60} = 0.0411 \text{ MEV}, \quad V_{21} = 2.2106 \text{ MeV}$$

$$V_{31} = 229.6176 \text{ MEV}, \quad V_{41} = -2.8070 \text{ MEV}$$

$$V_{51} = -1742.8433 \text{ MEV}, \quad V_{22} = 70.8578 \text{ MeV}$$

$$V_{32} = 34.3051 \text{ MEV}, \quad V_{42} = 3.6775 \text{ MeV}$$

$$V_{62} = -5633.1055 \text{ MEV}, \quad V_{23} = 31.4764 \text{ MEV}$$

$$V_{33} = 0.2382 \text{ MEV}, \quad V_{24} = 2.6328 \text{ MEV}$$

$$V_{34} = 4.5046 \text{ MEV},$$

Alle anderen Terme sind Null!

$^{192}_{78}\text{Pt}$

Energien

Sehr oft wird die Zuordnung der Zustände zu den Banden unmöglich, da eine starke Wechselwirkung eintritt. In solchen Fällen wurde kein Wert angegeben. Aufgrund der grossen Datenfülle können hier nur einige Daten wiedergegeben werden. Die experimentellen, sofern vorhanden, sind in den Klammern angegeben. (g=Grundzustandsbande), (Einheit: MEV)

	ϵ	γ	β	$\delta\delta$	β'
0^+	0.0		1.320 (1.120)		3.113
2^+	0.295 (0.316)	0.624 (0.612)	1.736 (1.576)		3.628
3^+		0.992 (0.921)			
4^+	0.767 (0.785)	1.288 (1.201)	2.411	1.700	
5^+		1.662		2.372	
6^+	1.388 (1.390)	2.077	3.314	3.167	
7^+		2.461		4.134	
8^+	2.146 (2.060)	2.976	4.359		
9^+		3.376			
10^+	3.030	5.486	3.974		

¹⁹²Pt: BE2-Werte innerhalb von Banden
78

In Klammern werden die experimentellen Werte angegeben.
(Einheit für die BE2-Werte: $e^2 b^2$, für die Quadrupolmomente: eb)

	g	β
$0^+ \longrightarrow 2^+$	2.697 (2.29 ± .17)	2.501
$2^+ \longrightarrow 4^+$	1.391	1.156
$4^+ \longrightarrow 6^+$	1.366	0.583
$6^+ \longrightarrow 8^+$	1.398	0.698
$8^+ \longrightarrow 10^+$	1.441	0.872

$$Q(2^+_{\gamma}) = +0.138 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_{\gamma}) = -0.179 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_{\beta}) = 0.857 \text{ eb}$$

	δ
$2^+ \longrightarrow 3^+$	1.215
$2^+ \longrightarrow 4^+$	0.617
$3^+ \longrightarrow 4^+$	0.040
$4^+ \longrightarrow 5^+$	0.531
$4^+ \longrightarrow 6^+$	0.768
$5^+ \longrightarrow 6^+$	0.011
$6^+ \longrightarrow 7^+$	0.342
$6^+ \longrightarrow 8^+$	0.880
$7^+ \longrightarrow 8^+$	0.002
$8^+ \longrightarrow 9^+$	0.255
$8^+ \longrightarrow 10^+$	0.973
$9^+ \longrightarrow 10^+$	0.000

¹⁹²Pt: BE2-Werte zwischen den Banden
78

Die Zahlen in den Klammern geben die experimentellen Werte an. (Einheit: $e^2 b^2$)

$0_2^+ \longrightarrow 2_2^+$	0.020
$0_2^+ \longrightarrow 2_{\beta}^+$	0.003
$2_2^+ \longrightarrow 2_{\gamma}^+$	0.782
$2_2^+ \longrightarrow 2_{\beta}^+$	0.002
$2_2^+ \longrightarrow 4_{\gamma}^+$	0.019
$2_2^+ \longrightarrow 4_{\beta}^+$	0.003
$4_2^+ \longrightarrow 4_{\gamma}^+$	0.349
$4_2^+ \longrightarrow 4_{\beta}^+$	0.002
$4_2^+ \longrightarrow 6_{\gamma}^+$	0.013
$4_2^+ \longrightarrow 6_{\beta}^+$	0.001
$6_2^+ \longrightarrow 6_{\gamma}^+$	0.232
$6_2^+ \longrightarrow 6_{\beta}^+$	0.002
$0_{\beta}^+ \longrightarrow 2_{\gamma}^+$	0.377
$2_{\gamma}^+ \longrightarrow 2_{\beta}^+$	0.004

Parameter des Pt-Isotops:

$^{194}_{78}\text{Pt}$ (Z=78, A=194)

$$B_2 = 76.3130 \cdot 10^{-42} \text{ MEV sec}^2 \quad .$$

$$P_3 = 0.1055 \cdot 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$P_4 = -0.00038 \cdot 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$V_{20} = -1054.7168 \text{ MEV}, \quad V_{30} = -53.8238 \text{ MEV}$$

$$V_{40} = 14652.7700 \text{ MEV}, \quad V_{50} = -9.3299 \text{ Mev}$$

$$V_{60} = -2.9934 \text{ MEV}, \quad V_{21} = 30.1277 \text{ Mev}$$

$$V_{31} = 525.7405 \text{ MEV}, \quad V_{41} = -6.1198 \text{ MEV}$$

$$V_{51} = -6377.5469 \text{ MEV}, \quad V_{22} = 228.0130 \text{ Mev}$$

$$V_{32} = 108.1003 \text{ MEV}, \quad V_{42} = 19.7061 \text{ Mev}$$

$$V_{62} = -26188.0120 \text{ MEV}, \quad V_{23} = 112.3183 \text{ MEV}$$

$$V_{33} = 14.4513 \text{ MEV}, \quad V_{24} = -22.7160 \text{ MEV}$$

$$V_{34} = 1.7258 \text{ MEV},$$

Alle anderen Terme sind Null!

$^{194}_{78}\text{Pt}$

Energien

Sehr oft wird die Zuordnung der Zustände zu den Banden unmöglich, da eine starke Wechselwirkung eintritt. In solchen Fällen wurde kein Wert angegeben. Aufgrund der grossen Datenfülle können hier nur einige Daten wiedergegeben werden. Die experimentellen, sofern vorhanden, sind in den Klammern angegeben. (g=Grundzustandsbande), (Einheit: MEV)

	β	γ	β	$\gamma\gamma$	β'
0 ⁺	0.0		1.240 (1.269)		3.268
2 ⁺	0.288 (0.329)	0.601 (0.622)	1.604 (1.623)		3.673
3 ⁺		0.948 (0.923)			
4 ⁺	0.771 (0.811)	1.265 (1.229)	2.319	1.610	
5 ⁺		1.612		2.286	
6 ⁺	1.410 (1.412)	2.071 (1.926)	3.303	3.052	
7 ⁺		2.416		3.215	
8 ⁺	2.193 (2.099)	3.014	4.386	4.026	
9 ⁺		3.346		4.254	
10 ⁺	3.112	4.077	5.584	5.132	
10 _x ⁺	(2.439)				
(8 ⁺ , 10 ⁺)	(2.862)				

$^{194}_{76}\text{Pt}$: BE2-Werte innerhalb von Banden

In Klammern werden die experimentellen Werte angegeben.
(Einheit für die BE2-Werte: $e^2 b^2$, für die Quadrupolmomente: eb)

	ϵ	β
$0^+ \longrightarrow 2^+$	1.870 (1.870 $\pm$.080)	1.712
$2^+ \longrightarrow 4^+$	0.942 (0.85 $\pm$.05)	0.748
$4^+ \longrightarrow 6^+$	0.923 (0.46 $\pm$.12)	0.466
$6^+ \longrightarrow 8^+$	0.942	0.588
$8^+ \longrightarrow 10^+$	0.967	0.690

$$Q(2^+_{\frac{1}{2}}) = +0.451 \quad \text{eb}$$

$$(0.64 \pm .16)$$

$$Q(2^+_{\frac{3}{2}}) = -0.476 \quad \text{eb}$$

$$Q(2^+_{\frac{5}{2}}) = 1.018 \quad \text{eb}$$

	γ
$2^+ \longrightarrow 3^+$	0.855
$2^+ \longrightarrow 4^+$	0.401 (0.50 $\pm$.20)
$3^+ \longrightarrow 4^+$	0.004
$4^+ \longrightarrow 5^+$	0.386
$4^+ \longrightarrow 6^+$	0.484
$5^+ \longrightarrow 6^+$	0.000
$6^+ \longrightarrow 7^+$	0.262
$6^+ \longrightarrow 8^+$	0.538
$7^+ \longrightarrow 8^+$	0.001
$8^+ \longrightarrow 9^+$	0.209
$8^+ \longrightarrow 10^+$	0.577
$9^+ \longrightarrow 10^+$	0.002

⁷⁴/₇₈ Pt: BE2-Werte zwischen den Banden

Die Zahlen in den Klammern geben die experimentellen Werte an. (Einheit: $e^2 b^2$)

$0_g^+ \longrightarrow 2_g^+$	0.001 (0.007 ± 0.001)
$0_g^+ \longrightarrow 2_\beta^+$	0.000
$2_g^+ \longrightarrow 2_g^+$	0.469 (0.58 ± 0.01)
$2_g^+ \longrightarrow 2_\beta^+$	0.001
$2_g^+ \longrightarrow 4_g^+$	0.021
$2_g^+ \longrightarrow 4_\beta^+$	0.011
$4_g^+ \longrightarrow 4_g^+$	0.214
$4_g^+ \longrightarrow 4_\beta^+$	0.006
$4_g^+ \longrightarrow 6_g^+$	0.015
$4_g^+ \longrightarrow 6_{\beta/2}^+$	0.005
$6_g^+ \longrightarrow 6_g^+$	0.140
$6_g^+ \longrightarrow 6_\beta^+$	0.006
$0_\beta^+ \longrightarrow 2_g^+$	0.234
$2_g^+ \longrightarrow 2_\beta^+$	0.003

Parameter des Pt-Isotops:

$^{196}_{78}\text{Pt}$ (Z=78, A=196)

$$B_2 = 46.3821 \cdot 10^{-42} \text{ MEV sec}^2 \quad .$$

$$P_3 = -0.1368 \cdot 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$P_4 = -0.0004 \cdot 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$V_{20} = -666.8557 \text{ MEV}, \quad V_{30} = -27.8421 \text{ MEV}$$

$$V_{40} = 5701.7500 \text{ MEV}, \quad V_{50} = -2.9898 \text{ MeV}$$

$$V_{60} = -0.7630 \text{ MEV}, \quad V_{21} = 2.9904 \text{ MeV}$$

$$V_{31} = 256.2888 \text{ MEV}, \quad V_{41} = -3.3249 \text{ MEV}$$

$$V_{51} = -1950.1375 \text{ MEV}, \quad V_{22} = 141.7172 \text{ MeV}$$

$$V_{32} = 53.2059 \text{ MEV}, \quad V_{42} = 7.6252 \text{ MeV}$$

$$V_{62} = -6302.5547 \text{ MEV}, \quad V_{23} = 75.0064 \text{ MEV}$$

$$V_{33} = 8.1775 \text{ MEV}, \quad V_{24} = -25.4894 \text{ MEV}$$

$$V_{34} = -1.8475 \text{ MEV},$$

Alle anderen Terme sind Null!

¹⁹⁶Pt
78
Energien

Sehr oft wird die Zuordnung der Zustände zu den Banden unmöglich, da eine starke Wechselwirkung eintritt. In solchen Fällen wurde kein Wert angegeben. Aufgrund der grossen Datenfülle können hier nur einige Daten wiedergegeben werden. Die experimentellen, sofern vorhanden, sind in den Klammern angegeben. (g=Grundzustandsbande), (Einheit: MEV)

	g	α	β	γ	β'
0 ⁺	0.0		1.101 (1.135)		2.969
2 ⁺	0.294 (0.356)	0.614 (0.689)	1.495		3.397
3 ⁺		0.992 (1.002)			
4 ⁺	0.782 (0.877)	1.244 (1.285)	2.280	1.623	
5 ⁺		1.648		2.370	
6 ⁺	1.424 (1.430)	2.026	3.293		
7 ⁺		2.438			
8 ⁺	2.205	2.942	4.318		
9 ⁺		3.351			
10 ⁺	3.116	3.969	5.445		

¹⁹⁶Pt: BE2-Werte innerhalb von Banden
78

In Klammern werden die experimentellen Werte angegeben.
(Einheit für die BE2-Werte: $e^2 b^2$, für die Quadrupolmomente: eb)

	δ	β
$0^+ \rightarrow 2^+$	3.007 (1.30 ± 0.05)	2.597
$2^+ \rightarrow 4^+$	1.520 (0.736 ± 0.04)	1.030
$4^+ \rightarrow 6^+$	1.483 (0.608 ± 0.168)	0.624
$6^+ \rightarrow 8^+$	1.519	1.001
$8^+ \rightarrow 10^+$	1.568	1.208

$$Q(2^+_{\delta}) = +0.478 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_{\beta}) = -0.526 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_{\beta}) = 1.274 \text{ eb}$$

	δ
$2^+ \rightarrow 3^+$	1.301
$2^+ \rightarrow 4^+$	0.707 (0.319 ± 0.045)
$3^+ \rightarrow 4^+$	0.016
$4^+ \rightarrow 5^+$	0.567
$4^+ \rightarrow 6^+$	0.845
$5^+ \rightarrow 6^+$	0.005
$6^+ \rightarrow 7^+$	0.380
$6^+ \rightarrow 8^+$	0.910
$7^+ \rightarrow 8^+$	0.001
$8^+ \rightarrow 9^+$	0.306
$8^+ \rightarrow 10^+$	0.954
$9^+ \rightarrow 10^+$	0.000

¹⁹⁶₇₈Pt: BE2-Werte zwischen den Banden

Die Zahlen in den Klammern geben die experimentellen Werte an. (Einheit: $e^2 b^2$)

$0^+_{\gamma} \rightarrow 2^+_{\gamma}$	0.002
$0^+_{\gamma} \rightarrow 2^+_{\beta}$	0.001
$2^+_{\gamma} \rightarrow 2^+_{\gamma}$	0.791
$2^+_{\gamma} \rightarrow 2^+_{\beta}$	(0.318 ± 0.023)
$2^+_{\gamma} \rightarrow 4^+_{\gamma}$	0.037
$2^+_{\gamma} \rightarrow 4^+_{\beta}$	(0.005 ± 0.002)
$4^+_{\gamma} \rightarrow 4^+_{\gamma}$	0.398
$4^+_{\gamma} \rightarrow 4^+_{\beta}$	(0.193 ± 0.097)
$4^+_{\gamma} \rightarrow 6^+_{\gamma}$	0.029
$4^+_{\gamma} \rightarrow 6^+_{\beta}$	0.001
$6^+_{\gamma} \rightarrow 6^+_{\gamma}$	0.270
$6^+_{\gamma} \rightarrow 6^+_{\beta}$	0.001
$0^+_{\beta} \rightarrow 2^+_{\gamma}$	0.541
$2^+_{\gamma} \rightarrow 2^+_{\beta}$	(0.142 ± 0.077)
$0^+_{\beta} \rightarrow 2^+_{\gamma}$	0.003
$0^+_{\beta} \rightarrow 2^+_{\gamma}$	0.010
$0^+_{\beta} \rightarrow 2^+_{\gamma}$	(0.022 ± 0.010)

ANHANG (Os)

Parameter des Os-Isotops:

 $^{184}_{76}\text{Os}$ (Z=76, A=184)

$$B_2 = 92.1822 \cdot 10^{-42} \text{ MEV sec}^2 \quad .$$

$$P_3 = -0.0656 \cdot 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$P_4 = 0.0 \cdot 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$V_{20} =$	-309.2564 MEV,	$V_{30} =$	-2.8459 MEV
$V_{40} =$	2873.1702 MEV,	$V_{50} =$	-0.1017 MeV
$V_{60} =$	0.0766 MEV,	$V_{21} =$	1.1203 MeV
$V_{31} =$	-133.7481 MEV,	$V_{41} =$	0.0 MEV
$V_{51} =$	980.4419 MEV,	$V_{22} =$	-25.0643 MeV
$V_{32} =$	0.2011 MEV,	$V_{42} =$	0.0 MeV
$V_{62} =$	-3172.0139 MEV,	$V_{23} =$	9.3899 MEV
$V_{33} =$	1.9248 MEV,	$V_{24} =$	-4.9872 MEV

$$V_{34} = -1.5308 \text{ MEV,}$$

Alle anderen Terme sind Null!

$^{184}_{76}\text{Os}$
Energien

Sehr oft wird die Zuordnung der Zustände zu den Banden unmöglich, da eine starke Wechselwirkung eintritt. In solchen Fällen wurde kein Wert angegeben. Aufgrund der grossen Datenfülle können hier nur einige Daten wiedergegeben werden. Die experimentellen, sofern vorhanden, sind in den Klammern angegeben. (g=Grundzustandsbande), (Einheit: MEV)

	g	γ	β	$\gamma\gamma$	β'
0 ⁺	0.0		1.191 (1.042)		1.572 (1.982)
2 ⁺	0.117 (0.120)	0.867 (0.943)	1.308 (1.202)		1.656
3 ⁺		1.007 (1.081)			
4 ⁺	0.377 (0.384)	1.154 (1.225)	1.433	1.751	1.957
5 ⁺		1.364 (1.428)		1.959	
6 ⁺	0.766 (0.774)	1.544 (1.613)	1.672	2.204	2.381
7 ⁺		1.838		2.466	
8 ⁺	1.269 (1.275)	2.089	1.911	2.692	2.913
9 ⁺		2.415		3.049	
10 ⁺	1.872 (1.870)	2.673	2.250	3.182	3.491

$^{184}_{76}\text{Os}$: BE2-Werte innerhalb von Banden

In Klammern werden die experimentellen Werte angegeben.
 (Einheit fuer die BE2-Werte: $e^2 b^2$, fuer die Quadrupolmomente: eb)

	B	β
$0^+ \longrightarrow 2^+$	3.698 (3.20 ± 0.62)	2.207
$2^+ \longrightarrow 4^+$	1.933	1.080
$4^+ \longrightarrow 6^+$	1.752	0.965
$6^+ \longrightarrow 8^+$	1.710	0.578
$8^+ \longrightarrow 10^+$	1.711	1.048

$$Q(2^+_{\beta}) = -1.727 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_{\gamma}) = (-2.4 \pm 1.1) \text{ eb}$$

$$Q(2^+_{\beta}) = 1.692 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_{\beta}) = 1.242 \text{ eb}$$

	γ
$2^+ \longrightarrow 3^+$	1.716
$2^+ \longrightarrow 4^+$	0.820
$3^+ \longrightarrow 4^+$	1.121
$4^+ \longrightarrow 5^+$	0.762
$4^+ \longrightarrow 6^+$	1.181
$5^+ \longrightarrow 6^+$	0.438
$6^+ \longrightarrow 7^+$	0.367
$6^+ \longrightarrow 8^+$	0.855
$7^+ \longrightarrow 8^+$	0.289
$8^+ \longrightarrow 9^+$	0.244
$8^+ \longrightarrow 10^+$	1.426
$9^+ \longrightarrow 10^+$	0.192

$^{184}_{76}\text{Os}$: BE2-Werte zwischen den Banden

Die Zahlen in den Klammern geben die experimentellen Werte an. (Einheit: $e^2 b^2$)

$0^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\gamma}$	0.030
$0^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.001
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\gamma}$	0.033
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.000
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\gamma}$	0.000
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\beta}$	0.000
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\gamma}$	0.038
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\beta}$	0.000
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\gamma}$	0.003
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\beta}$	0.000
$6^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\gamma}$	0.035
$6^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\beta}$	0.004
$0^+_{\beta} \longrightarrow 2^+_{\gamma}$	0.134
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.001

Parameter des Os-Isotops: Theory I (general. Modell)

$^{186}_{76}\text{Os}$ (Z=76, A=186)

$$B_2 = 88.7422 \cdot 10^{-42} \text{ MEV sec}^2 \quad .$$

$$P_3 = -0.0680 \cdot 10^{42} / (\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$P_4 = 0.0 \cdot 10^{42} / (\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$V_{20} = -312.7043 \text{ MEV}, \quad V_{30} = 0.0361 \text{ MEV}$$

$$V_{40} = 2985.4951 \text{ MEV}, \quad V_{50} = 0.1833 \text{ MeV}$$

$$V_{60} = 0.1657 \text{ MEV}, \quad V_{21} = -5.9855 \text{ MeV}$$

$$V_{31} = -140.3276 \text{ MEV}, \quad V_{41} = 0.0 \text{ MEV}$$

$$V_{51} = 1018.4243 \text{ MEV}, \quad V_{22} = -11.6255 \text{ MeV}$$

$$V_{32} = 3.7164 \text{ MEV}, \quad V_{42} = 0.0 \text{ MeV}$$

$$V_{62} = -3295.9138 \text{ MEV}, \quad V_{23} = 7.9082 \text{ MEV}$$

$$V_{33} = 1.6058 \text{ MEV}, \quad V_{24} = 4.5871 \text{ MEV}$$

$$V_{34} = 0.5917 \text{ MEV},$$

Alle anderen Terme sind Null!

$^{186}_{76}\text{Os}$ (Theorie I)

Energien

Sehr oft wird die Zuordnung der Zustände zu den Banden unmöglich, da eine starke Wechselwirkung eintritt. In solchen Fällen wurde kein Wert angegeben. Aufgrund der grossen Datenfuelle können hier nur einige Daten widergegeben werden. Die experimentellen, sofern vorhanden, sind in den Klammern angegeben. (g=Grundzustandsbande), (Einheit: MEV)

	g	α	β	$\alpha\alpha$	β'
0 ⁺	0.0		1.071 (1.067)		1.823 (1.456)
2 ⁺	0.142 (0.137)	0.662 (0.768)	1.317 (1.208)		2.269
3 ⁺		0.845 (0.910)			
4 ⁺	0.441 (0.434)	1.007 (1.071)	1.685	1.350 (1.352)	
5 ⁺		1.259 (1.276)		1.714 (1.560)	
6 ⁺	0.867 (0.869)	1.453 (1.491)	2.147	1.821 (1.776)	
7 ⁺		1.779 (1.752)		2.272	
8 ⁺	1.397 (1.427)	1.978	2.727	2.319	
9 ⁺		2.389		2.898	
10 ⁺	2.016 (2.070)	2.554	3.382		

$^{186}_{74}\text{Os}$: BE2-Werte innerhalb von Banden (Theory I)

In Klammern werden die experimentellen Werte angegeben.
 (Einheit fuer die BE2-Werte: $e^2 b^2$, fuer die Quadrupol-
 momente: eb)

	B	β
$0^+ \longrightarrow 2^+$	3.319 (3.11 ± .11)	2.401
$2^+ \longrightarrow 4^+$	1.747 (1.69 ± .12)	1.040
$4^+ \longrightarrow 6^+$	1.600 (1.64 ± .25)	0.772
$6^+ \longrightarrow 8^+$	1.575	0.780
$8^+ \longrightarrow 10^+$	1.579	0.875

$$C(2^+_{\gamma}) = -1.593 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_{\gamma}) = (-1.47 \pm .54)$$

$$Q(2^+_{\gamma}) = 1.531 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_{\gamma}) = -0.045 \text{ eb}$$

	δ
$2^+ \longrightarrow 3^+$	1.411
$2^+ \longrightarrow 4^+$	0.792
$3^+ \longrightarrow 4^+$	(0.99 ± .35) 0.725
$4^+ \longrightarrow 5^+$	0.568
$4^+ \longrightarrow 6^+$	1.092
$5^+ \longrightarrow 6^+$	0.300
$6^+ \longrightarrow 7^+$	0.328
$6^+ \longrightarrow 8^+$	1.186
$7^+ \longrightarrow 8^+$	0.168
$8^+ \longrightarrow 9^+$	0.194
$8^+ \longrightarrow 10^+$	1.134
$9^+ \longrightarrow 10^+$	0.071

$^{186}_{76}\text{Os}$: BE2-Werte zwischen den Banden (*Theorie I*)

Die Zahlen in den Klammern geben die experimentellen Werte an. (Einheit: $e^2 b^2$)

$0^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\gamma}$	0.028 (0.244 ± .024)
$0^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.003
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\gamma}$	0.085 (0.107 ± .011)
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.000
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\gamma}$	0.004 (0.026 ± .006)
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\beta}$	0.000
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\gamma}$	0.082 (0.176 ± .053)
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\beta}$	0.000
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\gamma}$	0.014
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\beta}$	0.000
$6^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\gamma}$	0.081
$6^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\beta}$	0.000
$0^+_{\beta} \longrightarrow 2^+_{\gamma}$	0.350
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.004

Parameter des Os-Isotops: Theory II (Gneuss-Greiner-Modell)

$^{186}_{76}\text{Os}$ (Z=76, A=186)

$$B_2 = 75.5890 \cdot 10^{42} \text{ MEV sec}^2 \quad .$$

$$P_3 = -0.0848 \cdot 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$P_4 = 0.0 \cdot 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$V_{20} = -445.21 \text{ MEV}, \quad V_{30} = 0.0 \text{ MEV}$$

$$V_{40} = 3494.5313 \text{ MEV}, \quad V_{50} = 0.0 \text{ MeV}$$

$$V_{60} = -0.7898 \text{ MEV}, \quad V_{61} = 0.0 \text{ MeV}$$

$$V_{31} = -144.9805 \text{ MEV}, \quad V_{41} = 0.0 \text{ MEV}$$

$$V_{51} = 1199.4583 \text{ MEV}, \quad V_{22} = 0.0 \text{ MeV}$$

$$V_{12} = 0.0 \text{ MEV}, \quad V_{42} = 0.0 \text{ MeV}$$

$$V_{62} = -3867.0920 \text{ MEV}, \quad V_{23} = 0.0 \text{ MEV}$$

$$V_{33} = 0.0 \text{ MEV}, \quad V_{24} = 0.0 \text{ MEV}$$

$$V_{34} = 0.0 \text{ MEV},$$

Alle anderen Terme sind Null!

$^{186}_{76}\text{Os}$ (Theorie II)

Energien

Sehr oft wird die Zuordnung der Zustände zu den Banden unmöglich, da eine starke Wechselwirkung eintritt. In solchen Fällen wurde kein Wert angegeben. Aufgrund der grossen Datenfuelle können hier nur einige Daten widergegeben werden. Die experimentellen, sofern vorhanden, sind in den Klammern angegeben. (g=Grundzustandsbande), (Einheit: MEV)

	g	γ	β	$\gamma\gamma$	β'
0^+	0.0		1.017 (1.061)		1.510 (1.456)
2^+	0.133 (0.137)	0.652 (0.768)	1.213 (1.208)		1.873
3^+		0.807 (0.910)			
4^+	0.427 (0.434)	0.975 (1.071)	1.533	1.292	
5^+		1.205 (1.276)		1.603	
6^+	0.860 (0.869)	1.413 (1.497)	1.962	2.054	
7^+		1.724 (1.752)		2.519	
8^+	1.412 (1.421)	1.930	2.510		
9^+		2.345			
10^+	2.065 (2.070)	2.426	3.120		

$^{186}_{76}\text{Os}$: BE2-Werte innerhalb von Banden (Theorie II)

In Klammern werden die experimentellen Werte angegeben.
 (Einheit fuer die BE2-Werte: $e^2 b^2$, fuer die Quadrupol-
 momente: eb)

	g	β
$0^+ \longrightarrow 2^+$	4.137 (3.11 $\pm$.11)	3.444
$2^+ \longrightarrow 4^+$	2.151 (1.69 $\pm$.12)	1.443
$4^+ \longrightarrow 6^+$	1.939 (1.64 $\pm$.25)	0.552
$6^+ \longrightarrow 8^+$	1.878	0.702
$8^+ \longrightarrow 10^+$	1.852	0.878

$$Q(2^+_2) = -1.808 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_2) = (-1.47 \pm .54)$$

$$Q(2^+_{\beta}) = 1.780 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_{\beta}) = -0.751 \text{ eb}$$

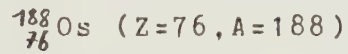
	γ
$2^+ \longrightarrow 3^+$	1.934
$2^+ \longrightarrow 4^+$	0.922 (0.99 $\pm$.35)
$3^+ \longrightarrow 4^+$	1.169
$4^+ \longrightarrow 5^+$	0.818
$4^+ \longrightarrow 6^+$	1.362
$5^+ \longrightarrow 6^+$	0.507
$6^+ \longrightarrow 7^+$	0.421
$6^+ \longrightarrow 8^+$	1.277
$7^+ \longrightarrow 8^+$	0.211
$8^+ \longrightarrow 9^+$	0.227
$8^+ \longrightarrow 10^+$	0.859
$9^+ \longrightarrow 10^+$	0.033

$^{186}_{76}\text{Os}$: BE2-Werte zwischen den Banden (Theorie II)

Die Zahlen in den Klammern geben die experimentellen Werte an. (Einheit: $e^2 b^2$)

$0^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\gamma}$	0.023
$0^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	(0.244 ± .024)
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\gamma}$	0.002
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\gamma}$	0.056
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	(0.107 ± .11)
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.001
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\gamma}$	0.006
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\beta}$	(0.026 ± .006)
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\beta}$	0.000
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\gamma}$	0.061
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\beta}$	(0.176 ± .053)
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\beta}$	0.000
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\gamma}$	0.019
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\beta}$	0.000
$6^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\gamma}$	0.062
$6^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\beta}$	0.000
$0^+_{\beta} \longrightarrow 2^+_{\gamma}$	0.185
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.000

Parameter des Os-Isotops:



$$B_2 = 84.4515 \cdot 10^{-42} \text{ MEV sec}^2 \quad .$$

$$P_3 = -0.07127 \cdot 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$P_4 = 0.0 \cdot 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$V_{20} = -323.7065 \text{ MEV}, \quad V_{30} = 1.7501 \text{ MEV}$$

$$V_{40} = 3137.7214 \text{ MEV}, \quad V_{50} = 0.3541 \text{ Mev}$$

$$V_{60} = 0.2213 \text{ MEV}, \quad V_{21} = -8.1210 \text{ Mev}$$

$$V_{31} = -148.6050 \text{ MEV}, \quad V_{41} = 0.0 \text{ MEV}$$

$$V_{51} = 1070.0386 \text{ MEV}, \quad V_{22} = -1.8798 \text{ Mev}$$

$$V_{32} = 6.0606 \text{ MEV}, \quad V_{42} = 0.0 \text{ Mev}$$

$$V_{62} = -3462.3076 \text{ MEV}, \quad V_{23} = 4.9513 \text{ MEV}$$

$$V_{33} = 0.2678 \text{ MEV}, \quad V_{24} = 9.7331 \text{ MEV}$$

$$V_{34} = 1.3545 \text{ MEV},$$

Alle anderen Terme sind Null!

$^{188}_{76}\text{Os}$

Energien

Sehr oft wird die Zuordnung der Zustände zu den Banden unmöglich, da eine starke Wechselwirkung eintritt. In solchen Fällen wurde kein Wert angegeben. Aufgrund der grossen Datenfuelle können hier nur einige Daten widergegeben werden. Die experimentellen, sofern vorhanden, sind in den Klammern angegeben. (g=Grundzustandsbande), (Einheit: MEV)

	g	γ	β	$\gamma\gamma$	β'
0^+	0.0		1.034 (1.085)		2.030
2^+	0.167 (0.155)	0.582 (0.633)	1.309 (1.305)		2.463
3^+		0.799 (0.790)			
4^+	0.494 (0.478)	0.978 (0.965)	1.713	1.283 (1.279)	
5^+		1.252		1.684	
6^+	0.942 (0.940)	1.473	2.236	1.839	
7^+		1.806			
8^+	1.487	2.047	2.879		
9^+		2.444			
10^+	2.116	2.683	3.599		

$^{188}_{76}\text{Os}$: BE2-Werte innerhalb von Banden

In Klammern werden die experimentellen Werte angegeben.
(Einheit fuer die BE2-Werte: $e^2 b^2$, fuer die Quadrupolmomente: eb)

	B	β
$0^+ \longrightarrow 2^+$	3.171 (2.80 $\pm$.10)	2.720
$2^+ \longrightarrow 4^+$	1.653 (1.44 $\pm$.09)	1.344
$4^+ \longrightarrow 6^+$	1.523 (1.68 $\pm$.26)	1.041
$6^+ \longrightarrow 8^+$	1.505	0.522
$8^+ \longrightarrow 10^+$	1.513	0.704

$$C(2^+_{\gamma}) = -1.472 \text{ eb}$$

$$(-1.31 \pm .34)$$

$$Q(2^+_{\gamma}) = 1.436 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_{\rho}) = -0.774 \text{ eb}$$

	δ
$2^+ \longrightarrow 3^+$	1.426
$2^+ \longrightarrow 4^+$	0.750 (1.05 $\pm$.35)
$3^+ \longrightarrow 4^+$	0.582
$4^+ \longrightarrow 5^+$	0.577
$4^+ \longrightarrow 6^+$	1.029
$5^+ \longrightarrow 6^+$	0.244
$6^+ \longrightarrow 7^+$	0.317
$6^+ \longrightarrow 8^+$	1.102
$7^+ \longrightarrow 8^+$	0.116
$8^+ \longrightarrow 9^+$	0.202
$8^+ \longrightarrow 10^+$	1.133
$9^+ \longrightarrow 10^+$	0.057

$^{188}_{76}\text{Os}$: BE2-Werte zwischen den Banden

Die Zahlen in den Klammern geben die experimentellen Werte an. (Einheit: $e^2 b^2$)

$0^+_g \longrightarrow 2^+_g$	0.017 (0.250 ± 0.022)
$0^+_g \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.001
$2^+_g \longrightarrow 2^+_g$	0.169 (0.157 ± 0.09)
$2^+_g \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.001
$2^+_g \longrightarrow 4^+_g$	0.020 (0.020 ± 0.004)
$2^+_g \longrightarrow 4^+_{\beta}$	0.001
$4^+_g \longrightarrow 4^+_g$	0.140 (0.16 ± 0.03)
$4^+_g \longrightarrow 4^+_{\beta}$	0.000
$4^+_g \longrightarrow 6^+_g$	0.034
$4^+_g \longrightarrow 6^+_{\beta}$	0.001
$6^+_g \longrightarrow 6^+_g$	0.127
$6^+_g \longrightarrow 6^+_{\beta}$	0.000
$0^+_{\beta} \longrightarrow 2^+_g$	0.016 (0.037 ± 0.001)
$2^+_g \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.001

Parameter des Os-Isotops:

$^{190}_{76}\text{Os}$ ($Z=76, a=190$)

$$E_2 = 72.0939 \cdot 10^{-42} \text{ MEV sec}^2 \quad .$$

$$P_3 = -0.0857 \cdot 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$P_4 = 0.0 \cdot 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$V_{20} = -395.7905 \text{ MEV}, \quad V_{30} = -4.5240 \text{ MEV}$$

$$V_{40} = 3673.2698 \text{ MEV}, \quad V_{50} = -0.3184 \text{ Mev}$$

$$V_{60} = 0.0309 \text{ MEV}, \quad V_{21} = 11.2759 \text{ Mev}$$

$$V_{31} = -167.6869 \text{ MEV}, \quad V_{41} = 1.4259 \text{ MEV}$$

$$V_{51} = 1254.5012 \text{ MEV}, \quad V_{22} = 49.9445 \text{ Mev}$$

$$V_{61} = 24.2869 \text{ MEV}, \quad V_{42} = 2.5123 \text{ Mev}$$

$$V_{62} = -4055.3115 \text{ MEV}, \quad V_{23} = -24.3227 \text{ MEV}$$

$$V_{33} = -0.6537 \text{ MEV}, \quad V_{24} = 3.7050 \text{ MEV}$$

$$V_{34} = 3.5713 \text{ MEV},$$

Alle anderen Terme sind Null!

$^{190}_{76}\text{Os}$
Energien

Sehr oft wird die Zuordnung der Zustände zu den Banden unmöglich, da eine starke Wechselwirkung eintritt. In solchen Fällen wurde kein Wert angegeben. Aufgrund der grossen Datenfülle können hier nur einige Daten wiedergegeben werden. Die experimentellen, sofern vorhanden, sind in den Klammern angegeben. (g=Grundzustandsbande), (Einheit: MEV)

	g	γ	β	$\gamma\gamma$	β'
0^+	0.0		1.025 (0.912)		2.407
2^+	0.207 (0.187)	0.505 (0.558)	1.305 (1.115)		2.744
3^+		0.760 (0.756)			
4^+	0.571 (0.548)	0.990 (0.955)	1.785	1.241 (1.163)	
5^+		1.264		1.718	
6^+	1.049 (1.048)	1.576	2.404	2.293	
7^+		1.865		2.398	
8^+	1.627 (1.662)	2.250	3.132		
9^+		2.551			
10^+	2.297	2.998	3.947		

¹⁹⁰₇₆Os: BE2-Werte innerhalb von Banden

In Klammern werden die experimentellen Werte angegeben.
(Einheit fuer die BE2-Werte: $e^2 b^2$, fuer die Quadrupolmomente: eb)

	g	β
$0^+ \longrightarrow 2^+$	3.147 (2.38 $\pm$.06)	2.958
$2^+ \longrightarrow 4^+$	1.575 (1.12 $\pm$.08)	1.394
$4^+ \longrightarrow 6^+$	1.481 (1.5 $\pm$.2)	1.159
$6^+ \longrightarrow 8^+$	1.477	1.036
$8^+ \longrightarrow 10^+$	1.492	1.051

$$Q(2^+_{g_1}) = -1.180 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_{\gamma}) = 1.158 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_{\beta}) = -1.266 \text{ eb}$$

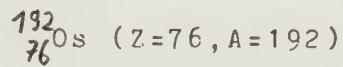
	γ
$2^+ \longrightarrow 3^+$	1.442
$2^+ \longrightarrow 4^+$	0.682 (0.88 $\pm$.18)
$3^+ \longrightarrow 4^+$	0.166
$4^+ \longrightarrow 5^+$	0.600
$4^+ \longrightarrow 6^+$	0.858
$5^+ \longrightarrow 6^+$	0.099
$6^+ \longrightarrow 7^+$	0.382
$6^+ \longrightarrow 8^+$	0.972
$7^+ \longrightarrow 8^+$	0.071
$8^+ \longrightarrow 9^+$	0.287
$8^+ \longrightarrow 10^+$	1.053
$9^+ \longrightarrow 10^+$	0.057

$^{190}_{76}\text{Os}$: BE2-Werte zwischen den Banden

Die Zahlen in den Klammern geben die experimentellen Werte an. (Einheit: $e^2 b^2$)

$0^+_{\gamma} \rightarrow 2^+_{\gamma}$	0.001 (0.230 ± .014)
$0^+_{\gamma} \rightarrow 2^+_{\beta}$	0.000
$2^+_{\gamma} \rightarrow 2^+_{\gamma}$	0.425 (0.260 ± .020)
$2^+_{\gamma} \rightarrow 2^+_{\beta}$	0.001
$2^+_{\gamma} \rightarrow 4^+_{\gamma}$	0.066 (0.019 ± .004)
$2^+_{\gamma} \rightarrow 4^+_{\beta}$	0.012
$4^+_{\gamma} \rightarrow 4^+_{\gamma}$	0.253 (0.37 ± .07)
$4^+_{\gamma} \rightarrow 4^+_{\beta}$	0.000
$4^+_{\gamma} \rightarrow 6^+_{\gamma}$	0.057
$4^+_{\gamma} \rightarrow 6^+_{\beta}$	0.005
$6^+_{\gamma} \rightarrow 6^+_{\gamma}$	0.191
$6^+_{\gamma} \rightarrow 6^+_{\beta}$	0.000
$0^+_{\beta} \rightarrow 2^+_{\gamma}$	0.281
$2^+_{\gamma} \rightarrow 2^+_{\beta}$	0.000

Parameter des Os-Isotops:



$$B_2 = 61.7710 \cdot 10^{-42} \text{ MEV sec}^2 \quad .$$

$$P_3 = -0.1025 \cdot 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$P_4 = -0.00029 \cdot 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$V_{20} = -498.3213 \text{ MEV}, \quad V_{30} = -19.9640 \text{ MEV}$$

$$V_{40} = 4281.6797 \text{ MEV}, \quad V_{50} = -2.1360 \text{ Mev}$$

$$V_{60} = -0.5379 \text{ MEV}, \quad V_{21} = -15.6464 \text{ Mev}$$

$$V_{31} = -195.7521 \text{ MEV}, \quad V_{41} = 1.6766 \text{ MEV}$$

$$V_{51} = 1464.1050 \text{ MEV}, \quad V_{22} = 107.3675 \text{ Mev}$$

$$V_{32} = 400.3302 \text{ MEV}, \quad V_{42} = 5.7114 \text{ Mev}$$

$$V_{62} = -4732.4687 \text{ MEV}, \quad V_{23} = -53.1778 \text{ MEV}$$

$$V_{33} = -5.4475 \text{ MEV}, \quad V_{24} = -10.4313 \text{ MEV}$$

$$V_{34} = 0.6705 \text{ MEV},$$

Alle anderen Terme sind Null!



Energien

Sehr oft wird die Zuordnung der Zustände zu den Banden unmöglich, da eine starke Wechselwirkung eintritt. In solchen Fällen wurde kein Wert angegeben. Aufgrund der grossen Datenfuelle können hier nur einige Daten widergegeben werden. Die experimentellen, sofern vorhanden, sind in den Klammern angegeben. (g=Grundzustandsbande), (Einheit: MEV)

	g	γ	β	$\gamma\gamma$	β'
0 ⁺	0.0		0.946 (0.956)		2.403
2 ⁺	0.219 (0.206)	0.468 (0.489)	1.220 (1.125)		2.703
3 ⁺		0.733 (0.690)			
4 ⁺	0.593 (0.580)	0.971 (0.907)	1.761	1.226 (1.069)	
5 ⁺		1.243		2.323	
6 ⁺	1.085 (1.089)	1.584	2.494	3.056	
7 ⁺		1.856			
8 ⁺	1.687 (1.708)	2.294	3.299		
9 ⁺		2.564			
10 ⁺	2.389	3.091	4.177		

$^{192}_{76}\text{Os}$: BE2-Werte innerhalb von Banden

In Klammern werden die experimentellen Werte angegeben.
(Einheit fuer die BE2-Werte: $e^2 b^2$, fuer die Quadrupolmomente: eb)

	g	β
$0^+ \longrightarrow 2^+$	3.371 (1.99 $\pm$.71)	3.290
$2^+ \longrightarrow 4^+$	1.643 (0.97 $\pm$.12)	1.414
$4^+ \longrightarrow 6^+$	1.556 (1.26 $\pm$.25)	0.914
$6^+ \longrightarrow 8^+$	1.553	1.080
$8^+ \longrightarrow 10^+$	1.567	1.224

$$Q(2^+_g) = -0.937 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_\gamma) = (-0.50 \pm .20)$$

$$Q(2^+_\beta) = 0.916 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_\beta) = -1.470 \text{ eb}$$

	γ
$2^+ \longrightarrow 3^+$	0.023
$2^+ \longrightarrow 4^+$	0.602 (0.37 $\pm$.06)
$3^+ \longrightarrow 4^+$	0.014
$4^+ \longrightarrow 5^+$	0.701
$4^+ \longrightarrow 6^+$	0.725
$5^+ \longrightarrow 6^+$	0.025
$6^+ \longrightarrow 7^+$	0.485
$5^+ \longrightarrow 8^+$	0.790
$7^+ \longrightarrow 8^+$	0.034
$8^+ \longrightarrow 9^+$	0.396
$8^+ \longrightarrow 10^+$	0.823
$9^+ \longrightarrow 10^+$	0.040

$^{192}_{76}\text{Os}$: BE2-Werte zwischen den Banden

Die Zahlen in den Klammern geben die experimentellen Werte an. (Einheit: $e^2 b^2$)

$0^+_g \longrightarrow 2^+_g$	0.049
$0^+_g \longrightarrow 2^+_{\beta}$	(0.2±0.1) 0.000
$2^+_g \longrightarrow 2^+_g$	0.679
$2^+_g \longrightarrow 2^+_{\beta}$	(0.36±0.03) 0.001
$2^+_g \longrightarrow 4^+_g$	0.093
$2^+_g \longrightarrow 4^+_{\beta}$	0.031
$4^+_g \longrightarrow 4^+_g$	0.346
$4^+_g \longrightarrow 4^+_{\beta}$	(0.37±0.18) 0.003
$4^+_g \longrightarrow 6^+_g$	0.066
$4^+_g \longrightarrow 6^+_{\beta}$	0.014
$6^+_g \longrightarrow 6^+_g$	0.242
$6^+_g \longrightarrow 6^+_{\beta}$	0.003
$0^+_{\beta} \longrightarrow 2^+_g$	0.303
$2^+_g \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.001

ANHANG (W)

Parameter des W-Isotops:

$${}_{74}^{180}\text{W} \quad (Z=74, A=180)$$

$$B_2 = 43.9766 \cdot 10^{-42} \text{ MEV sec}^2 \quad .$$

$$P_3 = 0.1168 \cdot 10^{-42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$P_4 = -0.00033 \cdot 10^{-42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$V_{20} = -60.5001 \text{ MEV}, \quad V_{30} = 2.4049 \text{ MEV}$$

$$V_{40} = 301.3835 \text{ MEV}, \quad V_{50} = -0.7598 \text{ Mev}$$

$$V_{60} = 113.4452 \text{ MEV}, \quad V_{21} = -0.2026 \text{ Mev}$$

$$V_{31} = -65.2161 \text{ MEV}, \quad V_{41} = 0.0 \text{ MEV}$$

$$V_{51} = 603.9614 \text{ MEV}, \quad V_{22} = 6.3904 \text{ Mev}$$

$$V_{32} = -0.2788 \text{ MEV}, \quad V_{42} = 0.0 \text{ Mev}$$

$$V_{62} = 1075.9441 \text{ MEV}, \quad V_{23} = -7.7387 \text{ MEV}$$

$$V_{33} = -0.1105 \text{ MEV}, \quad V_{24} = 9.9452 \text{ MEV}$$

$$V_{34} = 1.5987 \text{ MEV},$$

Alle anderen Terme sind Null!

¹⁸⁰W
74

Energien

Sehr oft wird die Zuordnung der Zustände zu den Banden unmöglich, da eine starke Wechselwirkung eintritt. In solchen Fällen wurde kein Wert angegeben. Aufgrund der grossen Datenfülle können hier nur einige Daten widergegeben werden. Die experimentellen, sofern vorhanden, sind in den Klammern angegeben. (g=Grundzustandsbande), (Einheit: MEV)

	g	γ	β	$\gamma\gamma$	β'
0 ⁺	0.0		0.870		1.679
2 ⁺	0.119 (0.104)	0.801 (0.828)	1.066 (1.008)		1.967
3 ⁺		0.911 (0.922)			
4 ⁺	0.354 (0.338)	1.028 (1.036)	1.359 (1.234)	1.872	
5 ⁺		1.182		2.036	
6 ⁺	0.680 (0.689)	1.331	1.725	2.184	
7 ⁺		1.522		2.367	
8 ⁺	1.076	1.694	2.150	2.542	
9 ⁺		1.917		2.744	
10 ⁺	1.530	2.106	2.623	2.940	

¹⁸⁰₇₄W: BE2-Werte innerhalb von Banden

In Klammern werden die experimentellen Werte angegeben.
(Einheit für die BE2-Werte: $e^2 b^2$, für die Quadrupolmomente: eb)

	g	β
$0^+ \longrightarrow 2^+$	3.650 (4.39 ± .33)	3.519
$2^+ \longrightarrow 4^+$	2.001	2.023
$4^+ \longrightarrow 6^+$	1.904	1.984
$6^+ \longrightarrow 8^+$	1.927	2.040
$8^+ \longrightarrow 10^+$	1.965	2.108

$$Q(2_2^+) = -1.712 \text{ eb}$$

$$Q(2_8^+) = 1.684 \text{ eb}$$

$$Q(2_{\beta}^+) = -1.578 \text{ eb}$$

	δ
$2^+ \longrightarrow 3^+$	1.880
$2^+ \longrightarrow 4^+$	0.820
$3^+ \longrightarrow 4^+$	1.265
$4^+ \longrightarrow 5^+$	0.946
$4^+ \longrightarrow 6^+$	1.367
$5^+ \longrightarrow 6^+$	0.630
$6^+ \longrightarrow 7^+$	0.553
$6^+ \longrightarrow 8^+$	1.570
$7^+ \longrightarrow 8^+$	0.379
$8^+ \longrightarrow 9^+$	0.376
$8^+ \longrightarrow 10^+$	1.694
$9^+ \longrightarrow 10^+$	0.268

$^{180}_{74}\text{W}$: BE2-Werte zwischen den Banden

Die Zahlen in den Klammern geben die experimentellen Werte an. (Einheit: $e^2 b^2$)

$0^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\gamma}$	0.512
$0^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.055
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\gamma}$	0.223
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.015
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\gamma}$	0.087
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\beta}$	0.011
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\gamma}$	0.264
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\beta}$	0.006
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\gamma}$	0.060
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\beta}$	0.004
$6^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\gamma}$	0.273
$6^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\beta}$	0.004
$0^+_{\beta} \longrightarrow 2^+_{\gamma}$	0.033
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.024

Parameter des W-Isotops:

$${}_{74}^{182}\text{W} \quad (Z=74, A=182)$$

$$B_2 = 71.432 \cdot 10^{-42} \text{ MEV sec}^2 \quad .$$

$$P_2 = 0.00013 \cdot 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$P_2 = 0.0 \cdot 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$V_{20} = -128.4077 \text{ MEV}, \quad V_{30} = 0.2417 \text{ MEV}$$

$$V_{40} = 1253.8965 \text{ MEV}, \quad V_{50} = -1.8654 \text{ Mev}$$

$$V_{60} = -1.1183 \text{ MEV}, \quad V_{21} = -29.4666 \text{ Mev}$$

$$V_{31} = -7.5009 \text{ MEV}, \quad V_{41} = -1.9725 \text{ MEV}$$

$$V_{51} = -1557.103 \text{ MEV}, \quad V_{22} = 23.9311 \text{ Mev}$$

$$V_{32} = 2.6693 \text{ MEV}, \quad V_{42} = -1.7320 \text{ Mev}$$

$$V_{62} = 558.5046 \text{ MEV}, \quad V_{23} = -6.2142 \text{ MEV}$$

$$V_{33} = -3.8117 \text{ MEV}, \quad V_{24} = 18.4065 \text{ MEV}$$

$$V_{64} = 1.0325 \text{ MEV},$$

Alle anderen Terme sind Null!

$^{182}_{74}\text{W}$

Energien

Sehr oft wird die Zuordnung der Zustände zu den Banden unmöglich, da eine starke Wechselwirkung eintritt. In solchen Fällen wurde kein Wert angegeben. Aufgrund der grossen Datenfülle können hier nur einige Daten widergegeben werden. Die experimentellen, sofern vorhanden, sind in den Klammern angegeben. (g=Grundzustandsbande), (Einheit: MEV)

	g	γ	β	$\gamma\gamma$	β'
0 ⁺	0.0		1.349 (1.738)		2.611
2 ⁺	0.111 (0.100)	1.164 (1.121)	1.539 (1.257)		2.949
3 ⁺		1.298 (1.311)			
4 ⁺	0.346 (0.329)	1.442 (1.443)	1.871 (1.510)	2.576	
5 ⁺		1.637 (1.624)		2.816	
6 ⁺	0.680 (0.681)	1.817	2.305	3.046	
7 ⁺		2.070		3.313	
8 ⁺	1.096	2.274	2.817	3.567	
9 ⁺		2.577		3.872	
10 ⁺	1.580	2.802	3.394	4.147	

¹⁸²₇₄W: BE2-Werte innerhalb von Banden

In Klammern werden die experimentellen Werte angegeben.
(Einheit für die BE2-Werte: $e^2 b^2$, für die Quadrupolmomente: eb)

	ε	β
$0^+ \longrightarrow 2^+$	3.889 (4.24 $\pm$.14)	3.433
$2^+ \longrightarrow 4^+$	2.093 (2.08 $\pm$.15)	1.899
$4^+ \longrightarrow 6^+$	1.967	1.835
$6^+ \longrightarrow 8^+$	1.989	1.891
$8^+ \longrightarrow 10^+$	2.057	1.978

$$C(2_g^+) = -1.773 \text{ eb}$$

$$Q(2_g^+) = 1.676 \text{ eb}$$

$$Q(2_\beta^+) = -1.655 \text{ eb}$$

	γ
$2^+ \longrightarrow 3^+$	1.769
$2^+ \longrightarrow 4^+$	0.810
$3^+ \longrightarrow 4^+$	1.194
$4^+ \longrightarrow 5^+$	0.831
$4^+ \longrightarrow 6^+$	1.370
$5^+ \longrightarrow 6^+$	0.569
$6^+ \longrightarrow 7^+$	0.444
$6^+ \longrightarrow 8^+$	1.605
$7^+ \longrightarrow 8^+$	0.319
$8^+ \longrightarrow 9^+$	0.274
$8^+ \longrightarrow 10^+$	1.767
$9^+ \longrightarrow 10^+$	0.200

$^{182}_{74}\text{W}$: BE2-Werte zwischen den Banden

Die Zahlen in den Klammern geben die experimentellen Werte an. (Einheit: $e^2 b^2$)

$0_g^+ \longrightarrow 2_g^+$	0.111 (0.124 $\pm$.006)
$0_g^+ \longrightarrow 2_\beta^+$	0.108
$2_g^+ \longrightarrow 2_g^+$	0.078 (0.047 $\pm$.003)
$2_g^+ \longrightarrow 2_\beta^+$	0.033
$2_g^+ \longrightarrow 4_g^+$	0.004
$2_g^+ \longrightarrow 4_\beta^+$	0.035
$4_g^+ \longrightarrow 4_g^+$	0.097
$4_g^+ \longrightarrow 4_\beta^+$	0.020
$4_g^+ \longrightarrow 6_g^+$	0.000
$4_g^+ \longrightarrow 6_\beta^+$	0.020
$6_g^+ \longrightarrow 6_g^+$	0.101
$6_g^+ \longrightarrow 6_\beta^+$	0.014
$0_\beta^+ \longrightarrow 2_g^+$	0.063
$2_g^+ \longrightarrow 2_\beta^+$	0.012

Parameter des W-Isotops:

$${}_{74}^{184}\text{W} \quad (Z=74, A=184)$$

$$E_2 = 97.0163 \cdot 10^{-42} \text{ MEV sec}^2 \quad .$$

$$P_3 = -0.0623 \cdot 10^{42} \text{ 1/(MEV sec}^2) \quad .$$

$$P_4 = 0.0 \cdot 10^{42} \text{ 1/(MEV sec}^2) \quad .$$

$$V_{20} = -290.5601 \text{ MEV}, \quad V_{30} = -1.5651 \text{ MEV}$$

$$V_{40} = 2730.3665 \text{ MEV}, \quad V_{50} = 0.0170 \text{ Mev}$$

$$V_{60} = 0.1083 \text{ MEV}, \quad V_{21} = -1.1230 \text{ Mev}$$

$$V_{31} = -126.6850 \text{ MEV}, \quad V_{41} = 0.0 \text{ MEV}$$

$$V_{51} = 931.7373 \text{ MEV}, \quad V_{22} = -24.2027 \text{ Mev}$$

$$V_{32} = -0.0253 \text{ MEV}, \quad V_{42} = 0.0 \text{ Mev}$$

$$V_{62} = -3014.8704 \text{ MEV}, \quad V_{23} = 12.6254 \text{ MEV}$$

$$V_{33} = 3.1944 \text{ MEV}, \quad V_{24} = -4.9105 \text{ MEV}$$

$$V_{34} = -1.6792 \text{ MEV},$$

Alle anderen Terme sind Null!

$^{184}_{74}\text{W}$

Energien

Sehr oft wird die Zuordnung der Zustände zu den Banden unmöglich, da eine starke Wechselwirkung eintritt. In solchen Fällen wurde kein Wert angegeben. Aufgrund der grossen Datenfülle können hier nur einige Daten widergegeben werden. Die experimentellen, sofern vorhanden, sind in den Klammern angegeben. (g=Grundzustandsbande), (Einheit: MEV)

	g	δ	β	$\delta\delta$	β'
0^+	0.0		1.048 (1.003)		1.427 (1.285)
2^+	0.114 (0.111)	0.784 (0.904)	1.158 (1.120)		1.519 (1.386)
3^+		0.924 (1.007)			
4^+	0.367 (0.364)	1.062 (1.135)	1.279	1.598	1.810
5^+		1.271		1.806	
6^+	0.743 (0.748)	1.421	1.522	2.036	2.216
7^+		1.728		2.294	
8^+	1.226	1.963	1.728	2.497	2.719
9^+		2.280		2.853	
10^+	1.802	2.524	2.048	2.950	3.263

¹⁸⁴₇₄W: BE2-Werte innerhalb von Banden

In Klammern werden die experimentellen Werte angegeben.
(Einheit für die BE2-Werte: $e^2 b^2$, für die Quadrupolmomente: eb)

	g	β
$0^+ \longrightarrow 2^+$	3.431 (3.78 $\pm$ 1.10)	2.049
$2^+ \longrightarrow 4^+$	1.795	1.018
$4^+ \longrightarrow 6^+$	1.630	0.772
$6^+ \longrightarrow 8^+$	1.593	0.340
$8^+ \longrightarrow 10^+$	1.592	1.004

$$Q(2_g^+) = -1.660 \text{ eb}$$

$$Q(2_\beta^+) = 1.622 \text{ eb}$$

$$Q(2_\beta^+) = 1.240 \text{ eb}$$

	δ
$2^+ \longrightarrow 3^+$	1.570
$2^+ \longrightarrow 4^+$	0.771
$3^+ \longrightarrow 4^+$	0.992
$4^+ \longrightarrow 5^+$	0.682
$4^+ \longrightarrow 6^+$	0.897
$5^+ \longrightarrow 6^+$	0.262
$6^+ \longrightarrow 7^+$	0.214
$6^+ \longrightarrow 8^+$	0.512
$7^+ \longrightarrow 8^+$	0.272
$8^+ \longrightarrow 9^+$	0.215
$8^+ \longrightarrow 10^+$	1.349
$9^+ \longrightarrow 10^+$	0.172

$^{184}_{74}\text{W}$: BE2-Werte zwischen den Banden

Die Zahlen in den Klammern geben die experimentellen Werte an. (Einheit: $e^2 b^2$)

$0^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\gamma}$	0.028
$0^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.001
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\gamma}$	0.035
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.000
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\gamma}$	0.000
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\beta}$	0.000
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\gamma}$	0.040
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\beta}$	0.000
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\gamma}$	0.003
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\beta}$	0.001
$6^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\gamma}$	0.028
$6^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\beta}$	0.012
$0^+_{\beta} \longrightarrow 2^+_{\gamma}$	0.155
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.001

Parameter des W-Isotops:

$${}_{74}^{186}\text{W} \quad (Z=74, A=186)$$

$$E_2 = 90.9326 \cdot 10^{-42} \text{ MEV sec}^2 \quad .$$

$$P_3 = -0.0665 \cdot 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$P_4 = 0.0 \cdot 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$V_{20} = -311.6836 \text{ MEV}, \quad V_{30} = -2.4057 \text{ MEV}$$

$$V_{40} = 2912.7634 \text{ MEV}, \quad V_{50} = -0.0773 \text{ Mev}$$

$$V_{60} = 0.0844 \text{ MEV}, \quad V_{27} = -5.8916 \text{ Mev}$$

$$V_{37} = -135.9684 \text{ MEV}, \quad V_{47} = 0.0 \text{ MEV}$$

$$V_{57} = 994.0793 \text{ MEV}, \quad V_{22} = -26.4862 \text{ Mev}$$

$$V_{32} = -0.9167 \text{ MEV}, \quad V_{42} = 0.0 \text{ Mev}$$

$$V_{62} = -3215.6475 \text{ MEV}, \quad V_{23} = 21.2806 \text{ MEV}$$

$$V_{33} = 5.4312 \text{ MEV}, \quad V_{24} = -1.3990 \text{ MEV}$$

$$V_{34} = -1.4264 \text{ MEV},$$

Alle anderen Terme sind Null!

$^{186}_{74}\text{W}$

Energien

Sehr oft wird die Zuordnung der Zustände zu den Banden unmöglich, da eine starke Wechselwirkung eintritt. In solchen Fällen wurde kein Wert angegeben. Aufgrund der grossen Datenfülle können hier nur einige Daten widergegeben werden. Die experimentellen, sofern vorhanden, sind in den Klammern angegeben. (g=Grundzustandsbande), (Einheit: MEV)

	g	γ	β	$\gamma\gamma$	β'
0^+	0.0		0.941 (0.883)		1.381 (1.150)
2^+	0.127 (0.123)	0.718 (0.737)	1.064 (1.006)		1.485 (1.284)
3^+		0.881 (0.860)			
4^+	0.402 (0.396)	1.019 (1.029)	1.195	1.527	1.799
5^+		1.260		1.759	
6^+	0.805 (0.808)	1.509	1.355	2.006	2.227
7^+		1.750		2.286	
8^+	1.315	2.007	1.657	2.506	2.746
9^+		2.336		2.885	
10^+	1.914	2.601	2.000		

$^{186}_{74}\text{W}$: BE2-Werte innerhalb von Banden

In Klammern werden die experimentellen Werte angegeben.
(Einheit für die BE2-Werte: $e^2 b^2$, für die Quadrupolmomente: eb)

	g	β
$0^+ \longrightarrow 2^+$	3.390 (3.57 ± 0.09)	2.023
$2^+ \longrightarrow 4^+$	1.776	0.967
$4^+ \longrightarrow 6^+$	1.616	0.384
$6^+ \longrightarrow 8^+$	1.581	0.934
$8^+ \longrightarrow 10^+$	1.486	0.975

$$Q(2^+_2) = -1.636 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_3) = 1.590 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_3) = 1.282 \text{ eb}$$

	γ
$2^+ \longrightarrow 3^+$	1.497
$2^+ \longrightarrow 4^+$	0.780
$3^+ \longrightarrow 4^+$	0.807
$4^+ \longrightarrow 5^+$	0.591
$4^+ \longrightarrow 6^+$	0.484
$5^+ \longrightarrow 6^+$	0.383
$6^+ \longrightarrow 7^+$	0.269
$6^+ \longrightarrow 8^+$	1.127
$7^+ \longrightarrow 8^+$	0.249
$8^+ \longrightarrow 9^+$	0.212
$8^+ \longrightarrow 10^+$	1.313
$9^+ \longrightarrow 10^+$	0.149

$^{186}_{74}\text{W}$: BE2-Werte zwischen den Banden

Die Zahlen in den Klammern geben die experimentellen Werte an. (Einheit: $e^2 b^2$)

$0^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\gamma}$	0.029
$0^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.002
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\gamma}$	0.053
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.000
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\gamma}$	0.001
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\beta}$	0.000
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\gamma}$	0.054
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\beta}$	0.003
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\gamma}$	0.005
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\beta}$	0.004
$6^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\gamma}$	0.031
$6^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\beta}$	0.026
$0^+_{\beta} \longrightarrow 2^+_{\gamma}$	0.239
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.002

ANHANG (U)

Parameter des U-Isotops: U.a

$^{238}_{92}\text{U}$ (Z=92, A=238) ; Ein Minimum

$$E_2 = 112.4730 \cdot 10^{-42} \text{ MEV sec}^2 \quad .$$

$$P_3 = 0.0043 \cdot 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$P_4 = 0.0 \cdot 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$V_{20} =$	-79.7455 MEV,	$V_{30} =$	-1.2767 MEV
$V_{40} =$	618.5623 MEV,	$V_{50} =$	0.4786 Mev
$V_{60} =$	575.2615 MEV,	$V_{21} =$	-9.6127 Mev
$V_{31} =$	-97.3226 MEV,	$V_{41} =$	0.0 MEV
$V_{51} =$	15.6074 MEV,	$V_{22} =$	9.7770 Mev
$V_{32} =$	6.5557 MEV,	$V_{42} =$	0.0 Mev
$V_{62} =$	-974.1895 MEV,	$V_{23} =$	0.5908 MEV
$V_{33} =$	0.6169 MEV,	$V_{24} =$	1.6565 MEV
	$V_{34} =$	0.9115 MEV,	

Alle anderen Terme sind Null!

$^{238}_{92}\text{U}$ (Ein Minimum)

Energien

Sehr oft wird die Zuordnung der Zustände zu den Banden unmöglich, da eine starke Wechselwirkung eintritt. In solchen Fällen wurde kein Wert angegeben. Aufgrund der grossen Datenfülle können hier nur einige Daten wiedergegeben werden. Die experimentellen, sofern vorhanden, sind in den Klammern angegeben. (g=Grundzustandsbande), (Einheit: MEV)

	g	γ	β	β'
0^+	0.0		0.970 (0.993)	1.864
2^+	0.046 (0.045)	1.067 (1.060)	1.033 (1.035)	1.956
3^+		1.121 (1.106)		
4^+	0.150 (0.148)	1.212 (1.168)	1.154 (1.127)	2.097
5^+		1.281		
6^+	0.307 (0.307)	1.425	1.326 (1.270)	2.294
7^+		1.497		
8^+	0.512 (0.518)	1.692	1.547	2.539
9^+		1.761		
10^+	0.761 (0.776)	2.004	1.811	2.826

Energien $^{238}_{92}\text{U}$ (Fortsetzung) (1 Minimum)

	α	γ	β	β'
11 ⁺		2.068		
12 ⁺	1.050 (1.077)	2.355	2.115	3.151
13 ⁺		2.413		
14 ⁺	1.374 (1.415)	2.740	2.456	3.512
15 ⁺		2.793		
16 ⁺	1.731 (1.788)	3.156	2.829	3.904
17 ⁺		3.203		
18 ⁺	2.119 (2.191)	3.601	3.233	4.326
19 ⁺		3.644		
20 ⁺	2.535 (2.619)	4.073	3.665	4.776
21 ⁺		4.111		
22 ⁺	2.978 (3.068)	4.569	4.124	5.252
23 ⁺		4.603		
24 ⁺	3.447 (3.535)	5.088	4.607	5.753
25 ⁺		5.120		
26 ⁺	3.938 (4.019)	5.630	5.115	6.277
27 ⁺		5.658		
28 ⁺	4.452 (4.518)	6.193	5.645	6.824
29 ⁺		6.219		
30 ⁺	4.988 (5.036)	6.776	6.196	7.393
31 ⁺		6.799		
32 ⁺	5.544	7.381	6.768	7.986
33 ⁺		7.402		
34 ⁺	6.118	8.006	7.361	8.598
35 ⁺		8.025		

$^{238}_{92}\text{U}$: BE2-Werte innerhalb von Banden (1 Minimum)

In Klammern werden die experimentellen Werte angegeben.
(Einheit für die BE2-Werte: $e^2 b^2$, für die Quadrupolmomente: eb)

	ε	β		δ
$0^+ \rightarrow 2^+$	11.700 (11.70 ± 1.15)	10.049	$2^+ \rightarrow 3^+$	4.895
$2^+ \rightarrow 4^+$	6.121	4.587	$2^+ \rightarrow 4^+$	2.250
$4^+ \rightarrow 6^+$	5.557	4.639	$3^+ \rightarrow 4^+$	2.238
$6^+ \rightarrow 8^+$	5.441	4.778	$4^+ \rightarrow 5^+$	1.831
$8^+ \rightarrow 10^+$	5.471	4.935	$4^+ \rightarrow 6^+$	3.970
$10^+ \rightarrow 12^+$	5.567	5.106	$5^+ \rightarrow 6^+$	0.865
$12^+ \rightarrow 14^+$	5.698	5.285	$6^+ \rightarrow 7^+$	0.874
$14^+ \rightarrow 16^+$	5.850	5.470	$6^+ \rightarrow 8^+$	4.456
$16^+ \rightarrow 18^+$	6.013	5.658	$7^+ \rightarrow 8^+$	0.447
$18^+ \rightarrow 20^+$	6.184	5.847	$8^+ \rightarrow 9^+$	0.530
$20^+ \rightarrow 22^+$	6.360	6.038	$8^+ \rightarrow 10^+$	4.735
$22^+ \rightarrow 24^+$	6.540	6.228	$9^+ \rightarrow 10^+$	0.275
$24^+ \rightarrow 26^+$	6.721	6.418		
$26^+ \rightarrow 28^+$	6.903	6.607		
$28^+ \rightarrow 30^+$	7.085	6.794		

$$Q(2^+_{\beta}) = -3.097 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_{\gamma}) = 2.378 \text{ eb}$$

$$Q(2^+_{\beta}) = -2.429 \text{ eb}$$

$^{238}_{92}\text{U}$: BE2-Werte zwischen den Banden (1 Minimum)

Die Zahlen in den Klammern geben die experimentellen Werte an. (Einheit: $e^2 b^2$)

$0^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\gamma}$	0.332
$0^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	(0.127 ± 0.009)
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\gamma}$	0.108
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	(0.063 ± 0.009)
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.042
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.118
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\gamma}$	0.096
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\beta}$	0.019
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\gamma}$	0.012
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 4^+_{\beta}$	0.158
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\gamma}$	0.059
$4^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\beta}$	0.010
$6^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\gamma}$	0.004
$6^+_{\gamma} \longrightarrow 6^+_{\beta}$	0.165
$0^+_{\beta} \longrightarrow 2^+_{\gamma}$	0.392
$2^+_{\gamma} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.921

Parameter des U-Isotops: U.b

$^{238}_{92}\text{U}$ (Z=92, A=238) ; Zwei Minima

$$E_2 = 128.5279 * 10^{-42} \text{ MEV sec}^2 \quad .$$

$$P_3 = -0.0110 * 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$P_4 = 0.0 * 10^{42} 1/(\text{MEV sec}^2) \quad .$$

$$V_{20} = -66.6709 \text{ MEV}, \quad V_{30} = 2130.3015 \text{ MEV}$$

$$V_{40} = -22479.8906 \text{ MEV}, \quad V_{50} = 105416.7501 \text{ Mev}$$

$$V_{60} = -256354.0000 \text{ MEV}, \quad V_{70} = 351795.7500 \text{ Mev}$$

$$V_{80} = -276109.2000 \text{ MEV}, \quad V_{90} = 115906.0000 \text{ MEV}$$

$$V_{100} = -20204.2800 \text{ MEV}, \quad V_{21} = -9.6878 \text{ Mev}$$

$$V_{31} = 0.0118 \text{ MEV}, \quad V_{22} = -27.6142 \text{ Mev}$$

$$V_{32} = 0.1237 \text{ MEV}, \quad V_{23} = 0.0877 \text{ MEV}$$

$$V_{33} = 0.0 \text{ MEV}, \quad V_{24} = 0.3449 \text{ MEV}$$

$$V_{34} = 0.0 \text{ MEV},$$

Alle anderen Terme sind Null!

$^{238}_{92}\text{U}$ (2 Minima)

Energien

Sehr oft wird die Zuordnung der Zustände zu den Banden unmöglich, da eine starke Wechselwirkung eintritt. In solchen Fällen wurde kein Wert angegeben. Aufgrund der grossen Datenfülle können hier nur einige Daten widergegeben werden. Die experimentellen, sofern vorhanden, sind in den Klammern angegeben. (g=Grundzustandsbande), (Einheit: MEV)

	g	β	γ	$\beta'(x)$
0^+	0.0	1.049 (0.993)		0.899 (0.925)
2^+	0.046 (0.045)	1.092 (1.035)	1.058 (1.060)	0.937 (0.965)
3^+			1.073 (1.106)	
4^+	0.149 (0.148)	1.223 (1.127)	1.163 (1.168)	1.064 (1.055)
5^+			1.226	
6^+	0.307 (0.307)	1.426 (1.270)	1.323	1.232
7^+			1.430	
8^+	0.512 (0.518)	1.677	1.532	1.442
9^+			1.679	
10^+	0.762 (0.776)	1.970	1.785	1.689

Energien $^{238}_{92}\text{U}$ (Fortsetzung) (2 Minima)

	ε	β	δ	$\beta'(x)$
11 ⁺			1.968	
12 ⁺	1.051 (1.077)	2.299	2.078	1.969
13 ⁺			2.294	
14 ⁺	1.377 (1.415)	2.659	2.405	2.281
15 ⁺			2.652	
16 ⁺	1.735 (1.788)	3.048	2.764	2.620
17 ⁺			3.041	
18 ⁺	2.123 (2.191)	3.464	3.153	2.985
19 ⁺			3.457	
20 ⁺	2.538 (2.619)	3.902	3.567	3.374
21 ⁺			3.898	
22 ⁺	2.978 (3.068)	4.361	4.005	3.784
23 ⁺			4.362	
24 ⁺	3.441 (3.535)	4.840	4.466	4.214
25 ⁺			4.847	
26 ⁺	3.925 (4.019)	5.336	4.947	4.662
27 ⁺			5.352	
28 ⁺	4.428 (4.518)	5.849	5.447	5.127
29 ⁺			5.876	
30 ⁺	4.948 (5.036)	6.377	5.964	5.608
31 ⁺			6.419	
32 ⁺	5.485	6.919	6.498	6.102
33 ⁺			6.979	
34 ⁺	6.038	7.477	7.048	6.611
35 ⁺			7.560	

$^{238}_{92}\text{U}$: BE2-Werte innerhalb von Banden (2 Minima)

In Klammern werden die experimentellen Werte angegeben.
(Einheit für die BE2-Werte: e^2b^2 , für die Quadrupolmomente: eb)

	g	β	$\beta'(x)$		γ
$0^+ \rightarrow 2^+$	11.700 (11.70 ± 1.15)	8.270	4.438	$2^+ \rightarrow 3^+$	3.209
$2^+ \rightarrow 4^+$	6.119	3.108	3.270	$2^+ \rightarrow 4^+$	1.257
$4^+ \rightarrow 6^+$	5.550	3.268	4.927	$3^+ \rightarrow 4^+$	2.719
$6^+ \rightarrow 8^+$	5.430	3.259	5.068	$4^+ \rightarrow 5^+$	1.787
$8^+ \rightarrow 10^+$	5.459	3.257	5.249	$4^+ \rightarrow 6^+$	3.676
$10^+ \rightarrow 12^+$	5.558	3.285	5.459	$5^+ \rightarrow 6^+$	1.362
$12^+ \rightarrow 14^+$	5.697	3.340	5.684	$6^+ \rightarrow 7^+$	0.942
$14^+ \rightarrow 16^+$	5.862	3.417	5.921	$6^+ \rightarrow 8^+$	4.230
$16^+ \rightarrow 18^+$	6.045	3.509	6.167	$7^+ \rightarrow 8^+$	0.832
$18^+ \rightarrow 20^+$	6.241	3.609	6.419	$8^+ \rightarrow 9^+$	0.598
$20^+ \rightarrow 22^+$	6.448	3.717	6.679	$8^+ \rightarrow 10^+$	4.592
$22^+ \rightarrow 24^+$	6.664	3.829	6.945	$9^+ \rightarrow 10^+$	0.571
$24^+ \rightarrow 26^+$	6.888	3.943	7.217	$Q(2^+_{\gamma}) = -3.098 \text{ eb}$	
$26^+ \rightarrow 28^+$	7.120	4.059	7.496	$Q(2^+_{\delta}) = 1.022 \text{ eb}$	
$28^+ \rightarrow 30^+$	7.359	4.177	7.782	$Q(2^+_{\rho}) = -0.967 \text{ eb}$	
				$Q(2^+_{\rho(x)}) = 2.265 \text{ eb}$	

$^{238}_{92}\text{U}$: BE2-Werte zwischen den Banden (2 Minima)

Die Zahlen in den Klammern geben die experimentellen Werte an. (Einheit: $e^2 b^2$)

$0^+_g \longrightarrow 2^+_g$	0.301 (0.127 ± 0.009)
$0^+_g \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.074 (0.063 ± 0.009)
$2^+_g \longrightarrow 2^+_g$	0.000
$2^+_g \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.095
$2^+_g \longrightarrow 4^+_g$	0.006
$2^+_g \longrightarrow 4^+_{\beta}$	0.111
$2^+_g \longrightarrow 4^+_{\beta'}$	0.000
$4^+_g \longrightarrow 4^+_g$	0.066
$4^+_g \longrightarrow 4^+_{\beta}$	0.042
$4^+_g \longrightarrow 4^+_{\beta'}$	0.041
$4^+_g \longrightarrow 6^+_g$	0.000
$4^+_g \longrightarrow 6^+_{\beta}$	0.075
$4^+_g \longrightarrow 6^+_{\beta'}$	0.000
$6^+_g \longrightarrow 6^+_g$	0.088
$6^+_g \longrightarrow 6^+_{\beta}$	0.028
$6^+_g \longrightarrow 6^+_{\beta'}$	0.032
$0^+_{\beta} \longrightarrow 2^+_g$	0.767
$2^+_{\beta} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	2.196
$0^+_{\beta'} \longrightarrow 2^+_{\beta}$	0.126
$0^+_{\beta} \longrightarrow 2^+_{\beta'}$	0.168
$2^+_{\beta} \longrightarrow 2^+_{\beta'}$	0.262
$0^+_g \longrightarrow 2^+_{\beta'}$	0.016 (0.017 ± 0.007)

Referenzen

- (1) J.M.Eisenberg,W.Greiner; Nuclear Theory I,
Nopth Holland, Amsterdam (1975)
- (2) T.Mayer-Kuckuk, Physik der Atomkerne;
Teubner Studienbuecher, Stuttgart (1974)
- (3) A.Bohr,B.R.Mottelson; Nuclear Structure I,II;
W.A.Benjamin INC (1969);
A.Bohr,B.R.Mottelson; Mat.-Fys.Medd.Dan.Vid.Selsk. 27,
No.16 (1953)
- (4) Grosse; Max Plank-Institut Heidelberg, MPI H-1975-V26
- (5) G.Gneuss; Doktorarbeit, Universität Frankfurt/M. (1970)
- (6) C.C.Noack; Nucl.Phys. A108, (1968),403
- (7) P.O.Hess; Diplomarbeit, Universitaet Frankfurt/M. (1978)
- (8) G.Gneuss,W.Greiner; Nucl.Phys A171,(1971),449;
G.Gneuss,U.Mosel,W.Greiner; Phys.Lett., Vol.30B,
Vol.30b, No.6 (1969),397
- (9) M.Sedlmayr; Doktorarbeit, Univ. Frankfurt/M. (1976)
- (10) A.R.Edmonds; Drehimpulse in der Quantenmechanik;
Hochschultaschenbücher, Verlag Mannheim (1960)
- (11) M.E.Rose; Elementary Theory of Angular Momentum,
Wiley, New York (1957)
- (12) R.Gilmore; Lie Groups, Lie Algebras,...;
Wiley Sons (1974)
- (13) M.Hamermesh; Group Theory;
Addison-Wesley (1962)
- (14) W.Greiner;Theoretische Physik (QuantenMechanik II),
Verlag Harri Deutsch (1979)
- (15) L.C.Biedenharn; J. of. Math. Phys., Vol.4, No.3 (1963)
- (16) G.Racah; Group Theory and Spectroscopy,
Erg. der exak. Naturw. 37,(1965),28
- (17) E.Chacón,M.Moshinsky,R.T.Sharp; J. of. Math. Phys.,
Vol.17, No.5 (1976)
- (18) E.Chacón,M.Moshinsky; J. of Math. Phys.,
Vol.18, No.5 (1977)
- (19) M.A.Lohe; Thesis, Univ. of. Adelaide (1974)
- (20) T.M.Corrigan,F.J.Margetan,S.A.Williams;
Phys.Rev.C, Vol.14, No.6, (1976),2279

- (21) A.Georghe,A.A.Raduta,V.Ceausescu;
Nucl.Phys. A296 (1978),228
- (22) P.O.Hess, Journ. of Phys. G (1978)
- (23) S.G.Rohozinski; Z.Phys., Vol.268 (1974),421
- (24) P.O.Löwdin; Phys.Rev., Vol.139, No.2A (1965)
- (25) D.Habs et al.; KFK Report (1973),1715
D.Habs et al.; Z. Phys. 267 (1974),149
- (26) F.Iachello,A.Arima; Phys.Lett. 53B, (1974),309
F.Iachello,A.Arima; Ann.Phys. (N.Y.) 99, (1976),253
- (27) M.Moshinsky; to be published
- (28) H.Ower,H.J.Wollersheim; private communication
- (29) Nuclear Data Sheets; 9(1973), 10(1973), 13(1974),
22(1977)
K.Stelzer et al.; Phys.Lett., Vol 70B, No.3, (1977),297
M.Sakai; Nucl.Data.Tables 10, (1972),511
- (30) Nuclear Data Sheets; 9(1973), 10(1973), 13(1974),
21(1977)
M.Sakai; Nucl.Data.Tables 10, (1972),511
- (31) M.A.Preston,R.K.Bhaduri; "Structure of the nucleus",
Addison-Wesley Publishing Company,
Advanced Book Program (1975),p.395
- (32) K.Stelzer,J.Idzko; private communication
- (33) H.Ower; private communication
- (34) Martin Seiwert; Diplomarbeit, Univ. Frankfurt/M. (1979)
- (35) K.Stelzer et al.; Phys.Lett., Vol.70B, No.3 (1977),297
R.H.Ronningen et al.; Phys.Rev.C16 (1977),297
F.T.Baker et al.; Nucl.Phys.A266 (1976),337
C.Baklash et al.; Phys.Rev.C18 (1978),131
S.A.Hjorth et al.; Nucl.Phys.A262 (1976),328
- (36) L.v.Bernus; Diplomarbeit , Univ.Frankfurt/M. (197)
- (37) E.Schroedinger; Ann.d.Phys., Vierte Folge, Band 80,
(1926),437
- (38) F.M.Morse, H.Feshbach; Methods of Theoretical Physics,
M.C.Graw-Hill, New York (1953)
- (39) M.Fierz;Helv.Phys.Acta 16 (1943),365
S.Flügge;Ann.Phys. 39 (1941),373
- (40) A.Faessler,W.Greiner;Z.Physik 168 (1962),425
A.Faessler,W.Greiner,R.K.Sheline;Nucl.Phys. 70 (1965),33
- (41) H.Ower,Th.W.Elze,H.J.Idzko,K.Stelzer,

H.Emling, P.Fuchs, E.Grosse, D.Schwalm,
H.J.Wollersheim; private communication
H.Ower; Thesis, Univ. Frankfurt/M. (1980)

LEBENS LAUF

Ich wurde am 13.12.1953 als Sohn des Versicherungsangestellten Anton Hess und dessen Frau Anna Hess, geb. Bechstedt, in Königstein/Ts. geboren.

Im Frühjahr 1960 wurde ich in der Volksschule in Kelkheim-Münster eingeschult und wechselte im Frühjahr 1964 auf die Realschule Pestalozzi in Kelkheim über. Dort legte ich im Sommer 1969 die mittlere Reife ab. Im Herbst 1969 trat ich in das Leibniz-Gymnasium in Frankfurt-Höchst ein. Am 13.5.1972 erhielt ich die allgemeine Hochschulreife.

Vom 1.7.1972 bis 30.9.1973 war ich bei der Bundeswehr (Luftwaffe). Die 6-wöchige Ausbildung war in Goslar und den Rest der Zeit in Heide/Holstein.

Am 1.10.1973 begann ich mit dem Physikstudium und legte am 1.7.1975 die Diplomvorprüfung mit der Note "sehr gut" ab.

Im Frühjahr 1976 trat ich in das Institut für Theoretische Physik der Johann Wolfgang Goethe-Universität ein und begann dort mit der Diplomarbeit. Die Diplomprüfung legte ich am 19.5.1978 ab und bestand sie mit "Auszeichnung".

Seitdem beschäftigte ich mich mit meiner Doktorarbeit und beabsichtige nun nach ihrer Vollendung mich der Promotionsprüfung zu unterziehen.

Meine akademischen Lehrer waren:

Prof. Dr. R. Bass , Prof. Dr. K. Bethge ,
Prof. Dr. L.C. Biedenharn , Prof. Dr. A. Doiwa ,
Prof. Dr. T. Elze , Prof. Dr. H.J. Fink ,
Prof. Dr. U. Gerhard , Prof. Dr. W. Greiner ,
Prof. Dr. R. Jelitto , Prof. Dr. Kerner ,
Prof. Dr. R. Kulze , Prof. Dr. W. Martienssen ,
Prof. Dr. J.A. Maruhn , Prof. Dr. G. Mauck ,
Prof. Dr. E. Merzbacher , Dr. H. Miller ,
Prof. Dr. E. Mohler , Prof. Dr. M. Moshinsky ,
Prof. Dr. B. Müller , Prof. Dr. F. Rauch ,
Prof. Dr. J. Raphelsky , Prof. Dr. M. Reichert ,
Prof. Dr. H. Roesky , Prof. Dr. A. Schaarschmidt ,
Dr. U.E. Schröder, Prof. Dr. K. Stelzer

Meinem Lehrer, Herrn Prof. W. Greiner bin ich zu grossen Dank für die Anregung und Unterstützung dieser Arbeit verpflichtet.

Herrn Prof. Dr. J. Maruhn sei gedankt für die vielen hilfreichen Diskussionen und Ratschläge.

Meinen besonderen Dank gilt ferner Dr. Frank Margetan von der Iowa State University für seine tatkräftige Unterstützung.

Weiterhin möchte ich den folgenden Kollegen und Kolleginnen danken, mit denen ich viele nützliche Gespräche führen konnte:

N. Abul-Naga, M. Seiwert, Dr. S. G. Rohozinsky, Prof. Dr. M. Moshinsky, Dr. A. Frank, Dr. O. Castaños und J. Theis

Frau Utschig möchte ich für die Anfertigung der Bilder und Herrn Brose für den Druck der Arbeit danken.

Die numerischen Rechnungen wurden an der Maschine der Gesellschaft für Schwerionenforschung (GSI) in Darmstadt durchgeführt. Den Angestellten der GSI sei für ihre Hilfe gedankt.

